ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика и механика
Том 89, 1995

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques et Mecanique
Tome 89, 1995

ВЪРХУ ИЗСЛЕДВАНИЯТА НА АКАДЕМИК Н. ОБРЕШКОВ, СВЪРЗАНИ С РЕГУЛЯРНО МОНОТОННИТЕ ФУНКЦИИ[1]

ТОДОР ГЕНЧЕВ

Тодор Генчев. ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ АКАДЕМИКА Н. ОБРЕШКОВА, СВЯЗАННЫЕ С РЕГУЛЯРНО МОНОТОННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В этом статье представлен короткий обзор исследований академика Н. Обрешкова, связанные с регулярно монотонными функциями.

Todor Genchev. ON THE INVESTIGATIONS OF ACADEMICIAN N. OBRESHKOFF CONNECTED WITH REGULARLY MONOTONIC FUNCTIONS

A short survey of some investigations of the academician N. Obreshkoff connected with the regularly monotonic functions introduced by S. N. Bernstein is proposed.

В този кратък обзор ще се спра на публикациите на акад. Н. Обрешков, близки по дух с някои от класическите изследвания на С. Н. Бернщейн върху регулярно монотонните функции. Освен че в тези публикации намираме характерните за Обрешков простота и единство на методите, именно тук се съдържат и неравенствата, които привличат вниманието на младия тогава Ярослав Тагамлицки и в края на краищата го довеждат до неговата *Теорема за конусите*.

[1] Доклад, изнесен на 20 април 1996 г. на юбилейната научна сесия по случай стогодишнината от рождението на акад. Н. Обрешков.

Както ще стане ясно от самото изложение, за пряко влияние на работите на Бернщейн върху Обрешков не може да се говори. Неговите изследвания са предизвикани от естествения стремеж да си изясним връзката между някои резултати от теорията на разходящите редове, които вече е получил. Наистина на с. 105 от най-ранната му публикация [1], която може да се причисли към разглеждания цикъл, намираме следния пасаж: „При изследванията на зависимостта между условията на теоремите стигнах до някои резултати, които имат някакъв интерес". След това идва теорема 1, приведена по-долу в леко изменена редакция. Едва с течение на годините Обрешков осъзнава идейната близост на своите резултати с тези на Бернщейн и в самия край на своя жизнен и творчески път дава прости и елегантни доказателства на две от най-хубавите теореми на Бернщейн заедно с едно съществено обобщение на самото понятие за регулярно монотонна функция.

След това встъпление ще формулирам теорема 1, за която стана дума по-горе.

Теорема 1. *Нека реалните функции φ и ψ са дефинирани за $x > x_0$ и притежават непрекъснати производни до n-ти ред включително. Нека освен това е в сила неравенството*

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqq |\psi^{(n)}(x)|, \quad x > x_0, \tag{1}$$

и границите $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = a$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = b$ съществуват. Най-сетне нека $\psi^{(n)} \neq 0$ в целия интервал $(x_0, +\infty)$. В такъв случай е изпълнено и неравенството

$$|\varphi(x) - a| \leqq |\psi(x) - b|, \quad x > x_0. \tag{2}$$

Както отбелязва самият автор, тази теорема ни позволява да сравняваме скоростите, с които φ и ψ клонят към своите граници, когато $x \to +\infty$. За да мога да дам представа както за естеството на задачата, така и за метода на Обрешков, ще си позволя кратък коментар.

Ясно е, че за да получим (2), трябва да проинтегрираме (1) по подходящ начин. В случая $n = 1$ това се постига непосредствено. Наистина за произволни числа A и x, принадлежащи на интервала $(x_0, +\infty)$, имаме

$$|\varphi(x) - \varphi(A)| = \left|\int_A^x \varphi'(t)\,dt\right| \leqq \left|\int_A^x |\varphi'(t)|\,dt\right|$$
$$\leqq \left|\int_A^x |\psi'(t)|\,dt\right| = \left|\int_A^x \psi'(t)\,dt\right| = |\psi(x) - \psi(A)|,$$

откъдето, като оставим A да клони към $+\infty$ при фиксирано $x > x_0$, получаваме (2). От това разискване се вижда, че можем да заменим изискването $\psi' \neq 0$ с условието ψ' да не си сменя знака в интервала $(x_0, +\infty)$.

В общия случай доказателството е по-сложно, но Обрешков, прибягвайки към един от любимите си инструменти — формулата за n-тата разлика, с лекота се справя с възникналите затруднения. Ще припомня за какво става дума. Ако φ е дефинирана в интервала $(x_0, +\infty)$ за фиксирани $x > x_0$ и $h > 0$, полагаме последователно

$$\Delta_h\varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x), \quad \Delta_h^2\varphi(x) = \Delta_h\varphi(x+h) - \Delta_h\varphi(x), \quad \dots,$$
$$\Delta_h^n\varphi(x) = \Delta_h^{n-1}\Delta_h\varphi(x)$$

и индуктивно стигаме до равенството

$$\Delta_h^n\varphi(x) = \varphi(x+nh) - \binom{n}{1}\varphi(x+(n-1)h) + \binom{n}{2}\varphi(x+(n-2)h) + \dots + (-1)^n\varphi(x). \tag{3}$$

От друга страна, като вземем предвид (1), с помощта на класическата формула

$$\Delta_h^n\varphi(x) = \int_0^h \dots \int_0^h \varphi^{(n)}(x + t_1 + t_2 + \dots + t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n = \int_\Omega \varphi^{(n)}\Big(x + \sum_{j=1}^n t_j\Big) dt, \quad dt = dt_1 dt_2 \dots dt_n, \tag{4}$$

където $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ е n-мерният куб, дефиниран с неравенствата $0 \leqq t_j \leqq h$, $j = 1, 2, \dots, n$, непосредствено получаваме

$$|\Delta_h^n\varphi(x)| \leqq \int_\Omega \Big|\varphi^{(n)}\Big(x + \sum_{j=1}^n t_j\Big)\Big| dt \leqq \int_\Omega \Big|\psi^{(n)}\Big(x + \sum_{j=1}^n t_j\Big)\Big| dt = \Big|\int_\Omega \psi^{(n)}\Big(x + \sum_{j=1}^n t_j\Big) dt\Big| = |\Delta_h^n\psi(x)|,$$

защото $\psi^{(n)}$ не си сменя знака в целия интервал $(x_0, +\infty)$. По този начин Обрешков стига до решаващото съотношение

$$|\Delta_h^n\varphi(x)| \leqq |\Delta_h^n\psi(x)|, \quad x > x_0,$$

откъдето, имайки предвид (3), след граничния преход $h \to \infty$ получава неравенството

$$\left|\varphi(x) - a\sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu-1}\binom{n}{\nu}\right| \leqq \left|\psi(x) - b\sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu-1}\binom{n}{\nu}\right|, \quad x > x_0,$$

което съвпада с (2), защото очевидно $\sum\limits_{\nu=1}^n (-1)^{\nu-1}\binom{n}{\nu} = 1$.

Втората публикация [2] от разглеждания цикъл отново е поместена в годишника на университета. Тук основен е следният резултат:

Теорема 2. *Нека f и φ са две реални функции, дефинирани за $x > a$, които притежават непрекъснати производни до n-ти ред включително и $\varphi^{(n)} \neq 0$ в целия интервал $x > a$. По-нататък, нека съществуват безкрайна редица $\{x_\nu\} \to +\infty$ и цяло число m, $0 \leqq m < n$, такива, че границите*

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{f(x_\nu)}{x_\nu^m} = A, \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^m} = B \tag{5}$$

да съществуват. В такъв случай от неравенството

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqq \left|\varphi^{(n)}(x)\right|, \quad x > a, \tag{6}$$

следва неравенството

$$\left|f^{(m)}(x) - m!\,A\right| \leqq \left|\varphi^{(m)}(x) - m!\,B\right|, \quad x > a. \tag{7}$$

Тази теорема е значително по-дълбока от теорема 1. В разглежданата работа Обрешков дава две доказателства: в първото си служи с едно ново представяне на n-тото нютоново частно, а във второто — с познатата формула на Монтел за същото нютоново частно, която му позволява да обхване и случая, когато f приема и комплексни стойности. За да мога да дам повече подробности, ще припомня, че ако f е функция, дефинирана в някакъв интервал (α, β), нейното n-то нютоново частно с възли $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, $\{x_\nu\}_0^n \subset (\alpha, \beta)$, се дефинира било чрез формулата

$$N(f, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f(x_\nu)}{P'(x_\nu)},$$

където $P(x) = \prod_{\nu=0}^{n} (x - x_\nu)$, било рекурентно чрез равенствата

$$N(f, x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$N(f, x_0, x_1, x_2) = \frac{N(f, x_0, x_2) - N(f, x_0, x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$\cdots$$

$$N(f, x_0, \ldots, x_m, x_{m+1}) = \frac{N(f, x_0, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1}) - N(f, x_0, \ldots, x_{m-1}, x_m)}{x_{m+1} - x_m}.$$

Лесно се вижда [3], че ако f притежава n-та производна в (α, β), то съществува такова число $\xi \in (\alpha, \beta)$, че да имаме

$$N(f, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \min_\nu x_\nu < \xi < \max_\nu x_\nu. \tag{8}$$

Следователно n-тото нютоново частно на една функция с неотрицателна n-та производна е неотрицателно, както и да избираме възлите в разглеждания интервал.

Подготвяйки се за доказателството на теорема 2, Обрешков дава следното обобщение на равенство (8): Ако f и g са две функции, дефинирани и n-пъти диференцируеми в интервала (α, β), и освен това $g^{(n)}(x) \neq 0$ за $x \in (\alpha, \beta)$, то

$$\frac{N(f, x_0, x_1, \ldots, x_n)}{N(g, x_0, x_1, \ldots, x_n)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}, \quad \alpha < \xi < \beta. \tag{9}$$

Доказателството на (9) не се различава от класическото и се опира на теоремата на Рол. Трябва да отбележа, че строго погледнато един междинен етап е пропуснат: най-напред би трябвало да се убедим, например с помощта на (8), че $N(g, x_0, \ldots, x_n) \neq 0$, и след това да разсъждаваме така, както прави Обрешков. Такива пропуски, които не засягат същността на доказателствата, но затрудняват четенето, намираме и на други места в богатото творчество на Обрешков. Липсата на подробно цитиране, както и на уводни бележки, които да приобщават читателя към съответната проблематика, също не спомагат за популяризирането на безспорните постижения на Обрешков.

След това отклонение да се върнем към доказателството на теорема 2. Най-напред Обрешков фиксира числата $\eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_m$ произволно в интервала $x > a$ и след това избира от редицата $\{x_\nu\}$ (вж. (5)) такава подредица $\{t_i\}$, че да имаме $t_1 > \eta_k$, $0 \leqq k \leqq m$, и освен това $\lim\limits_{t_i \to \infty} \dfrac{t_{i+1}}{t_i} = \infty$. По-нататък с помощта на тъждеството

$$\left| \frac{N(f, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{n-m+i-1})}{N(\varphi, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{n-m+i-1})} \right| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{\varphi^{(n)}(\xi)} \right| \leqq 1$$

той стига до неравенството

$$\begin{aligned} &|N(f, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{n-m+i-1})| \\ &\qquad \leqq |N(\varphi, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{n-m+i-1})|, \end{aligned}$$

откъдето, като умножи с $|t_i t_{i+1} \ldots t_{i+n-m-1}|$ и извърши граничния преход $t_i \to \infty$, получава

$$|N(f, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m) - A| \leqq |N(\varphi, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m) - B|, \tag{10}$$

т. е.

$$\left| f^{(n)}(\xi) - m!\, A \right| \leqq \left| \varphi^{(n)}(\xi) - m!\, B \right|, \quad \min_k \eta_k < \xi < \max_k \eta_k. \tag{11}$$

Най-сетне, полагайки $\eta_k = x + kh$, $0 \leqq k \leqq m$, където x е произволно число от интервала $(a, +\infty)$, Обрешков оставя h да клони към нула в (11) и получава (7).

За да илюстрираме казаното, ще разгледаме простия случай $n = 2$, $m = 1$. Понеже в случая

$$N(f, x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} + \frac{f(x_1)}{(x_0 - x_1)(x_2 - x_1)} + \frac{f(x_2)}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)},$$

$a < x_0 < x_1 < x_2$, неравенството

$$|N(f, x_0, x_1, x_2)| \leqq |N(\varphi, x_0, x_1, x_2)|$$

взема вида

$$\left|\frac{f(x_0)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}+\frac{f(x_1)}{(x_0-x_1)(x_2-x_1)}+\frac{f(x_2)}{(x_0-x_2)(x_1-x_2)}\right|$$
$$\leqq \left|\frac{\varphi(x_0)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}+\frac{\varphi(x_1)}{(x_2-x_1)(x_0-x_1)}+\frac{\varphi(x_2)}{(x_0-x_2)(x_1-x_2)}\right|. \quad (12)$$

Като умножим (12) с $x_2 - x_0$ и извършим граничния преход $x_2 \to +\infty$,[1] намираме

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}-A\right| \leqq \left|\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}{x_1-x_0}-B\right|,$$

откъдето, като оставим x_1 да клони към x_0, получаваме

$$|f'(x_0)-A| \leqq |\varphi'(x_0)-B|$$

и завършваме доказателството, защото x_0 е произволна точка от интервала $(a,+\infty)$.

В следващите си публикации [4–6] Обрешков опростява своя метод, като обобщава постановката на въпроса, разглеждайки и едностранни неравенства. Следващата теорема е типична.

Теорема 3 ([4]). *Нека φ и ψ са реални функции, дефинирани за $x < a$, които притежават n-ти производни, удовлетворяващи неравенството*

$$\varphi^{(n)}(x) \leqq \psi^{(n)}(x), \quad x < a. \quad (13)$$

По-нататък да предположим, че за някакво цяло m, $0 \leqq m < n$, съществува редица $\{x_\nu\} \to -\infty$, за която границите

$$\lim_{x_\nu \to -\infty} \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^m} = A \quad \text{и} \quad \lim_{x_\nu \to -\infty} \frac{\psi(x_\nu)}{x_\nu^m} = B \quad (14)$$

съществуват. В такъв случай имаме

$$\varphi^{(m)}(x) - m!\,A \leqq \psi^{(m)}(x) - m!\,B, \quad x < a. \quad (15)$$

Нещо повече, ако за някакво x_0 (15) се превръща в равенство, то имаме равенство в целия интервал $x \leqq x_0$.

Ясно е, че тази теорема е по-обща от теорема 2, защото ако $\psi^{(n)} \neq 0$ за $x < a$ и е непрекъсната, можем да заменим неравенството $|\varphi^{(n)}(x)| \leqq |\psi^{(n)}(x)|$, $x < a$, с двете неравенства $\varphi^{(n)}(x) \leqq \varepsilon\psi^{(n)}(x)$ и $-\varphi^{(n)}(x) \leqq \varepsilon\psi^{(n)}(x)$, $x < a$, където ε е знакът на $\psi^{(n)}$.

Доказателството на теорема 3 се извършва по схемата, използвана за доказателството на теорема 2, но е по-просто, защото в случая е достатъчно да приложим равенство (8) към n-тото нютоново частно $N(f,\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_m,t_i,t_{i+1},\ldots,t_{n-m+i-1})$, където $f=\psi-\varphi$, и след граничния преход $t_i \to -\infty$ да получим

$$N(\varphi,\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_m) - A \leqq N(\psi,\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_m) - B,$$

което, както видяхме, води до (15).

---

[1] Предполагаме, че $x_2 \to +\infty$ чрез стойности от редицата $\{x_\nu\}$, за която границите (5) съществуват.

Особено интересен е случаят $m = 0$, $A = B = 0$. Тъй като тези предположения ни осигуряват и равенствата

$$\lim_{x_\nu \to -\infty} \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k} = 0, \quad \lim_{x_\nu \to -\infty} \frac{\psi(x_\nu)}{x_\nu^k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

стигаме до следния забележителен резултат:

Теорема 4. *Нека функциите φ и ψ са дефинирани за $x < a$ и притежават n-ти производни, удовлетворяващи (13). В такъв случай, ако границите $\lim_{x_\nu \to -\infty} \varphi(x_\nu) = 0$, $\lim_{x_\nu \to -\infty} \psi(x_\nu) = 0$ съществуват за някаква редица $\{x_\nu\} \to -\infty$, то неравенствата*

$$\varphi^{(k)}(x) \leqq \psi^{(k)}(x), \quad x < a, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{16}$$

са налице. Нещо повече, ако за някакво x_0, $x_0 < a$, и някакво ν, $0 \leqq \nu < n$, имаме $\varphi^{(\nu)}(x_0) = \psi^{(\nu)}(x_0)$, то $\varphi^{(\nu)}(x) = \psi^{(\nu)}(x)$ в целия интервал $x \leqq x_0$.

В частния случай $\psi(x) = e^x$ получаваме силно обобщение на една красива теорема на Тагамлицки [7].

Теорема 5. *Нека $n \geqq 1$ е естествено число и функцията f е n пъти диференцируема в интервала $x \leqq 0$. Ако $f(x) \leqq e^x$ за $x \leqq 0$ и освен това f удовлетворява условията $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ и $f(0) = 1$, то $f(x) = e^x$ в целия интервал $x \leqq 0$.*

Наистина според теорема 4 функцията $F(x) = e^x - f(x)$ е монотонно растяща и неотрицателна в интервала $x \leqq 0$. Понеже по условие $F(0) = 0$, то $F(x) = 0$ за $x \leqq 0$.

Ще завърша този по необходимост кратък обзор с няколко думи за изследванията на Обрешков, непосредствено свързани с теорията на регулярно монотонните функции. В своята работа [2], за която вече говорих, изхождайки от формулата на Монтел

$$N(f, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(w)\, dt_n,$$

$$w = x_n t_n + x_{n-1}(t_{n-1} - t_n) + \cdots + x_0(1 - t_1), \tag{17}$$

за n-тото нютоново частно, Обрешков между другото установява следната

Теорема 6. *Нека f притежава n-та производна в интервала $x > a$ и за някаква безкрайна редица $\{x_\nu\} \to +\infty$ и някакво цяло m, $0 \leqq m < n$, границата $\lim_{x_\nu \to \infty} \dfrac{f(x_\nu)}{x_\nu^m} = 0$ съществува. Тогава, ако интегралът $\int_x^\infty t^{n-m-1} \left|f^{(n)}(t)\right| dt$ е сходящ за всяко $x > a$, равенството*

$$f^{(m)}(x) = m!\, A + \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m-1)!} \int_x^\infty (t-x)^{n-m-1} f^{(n)}(t)\, dt, \quad x > a, \tag{18}$$

е удовлетворено.

Пет години по-късно Обрешков развива тази тема и публикува своята забележителна работа [8], в която между другото дава забележително просто и елегантно доказателство на една от класическите теореми на Бернщейн. Обрешков започва разискването със следната

Теорема 7. *Нека f е реална функция, дефинирана за $x > a$, която има производни до $(n+1)$-ви ред включително и удовлетворява условията*

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geqq 0, \quad x > a,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n+1. \tag{19}$$

В такъв случай е в сила равенството

$$f(x) = \delta + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int\limits_x^\infty (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\, dt, \quad x > a, \tag{20}$$

където, разбира се, $\delta = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Именно интегралното представяне (20) е изходният пункт на Обрешков към теоремата на Бернщейн, чиято формулировка привеждам само за пълнота на изложението.

Теорема (С. Н. Бернщейн). *Нека f е реална функция, дефинирана и безбройно много пъти диференцируема в интервала $x \geqq 0$. Нека условието $(-1)^k f^{(k)}(x) \geqq 0$, $x \geqq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ е удовлетворено. В такъв случай f има вида*

$$f(x) = \int\limits_0^\infty e^{-tx}\, d\alpha(t), \quad x > 0, \tag{21}$$

където α е дефинирана, монотонно растяща и ограничена в интервала $[0, +\infty)$.

Забележка. Функциите, удовлетворяващи условията на теоремата, се наричат *регулярно монотонни.*

Сега е моментът да скицирам доказателството на Обрешков. Без ограничение на общността можем да предположим, че $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, т. е. че в (20) имаме $\delta = 0$. В такъв случай след субституцията $\tau = \dfrac{n}{t}$ от (20) получаваме

$$f(x) = (-1)^{n+1} \frac{n^n}{(n-1)!} \int\limits_0^{\frac{n}{x}} \left(1 - \frac{x\tau}{n}\right)^n \frac{1}{\tau^{n+2}} f^{(n+1)}\left(\frac{n}{\tau}\right) d\tau, \quad x > 0. \tag{22}$$

(Интегралът (22) е сходящ, защото сходимостта на (20) е установена в процеса на доказателството на теорема 7.) Остава ни да въведем монотонно растящата и ограничена функция

$$\alpha_n(\tau) = \int\limits_0^\tau (-1)^{n+1} f^{(n+1)}\left(\frac{n}{s}\right) \frac{1}{s^{n+2}} \frac{n^n}{(n-1)!}\, ds,$$

за да представим (22) във вида

$$f(x) = \int_0^{\frac{n}{x}} \left(1 - \frac{\tau x}{n}\right)^n \, d\alpha_n(\tau). \qquad (23)$$

Най-сетне, опирайки се на двете класически теореми на Хели, избираме сходяща подредица от $\{\alpha_n\}$ и като извършим традиционния, но деликатен граничен преход $n \to \infty$ в (23), получаваме (21) и завършваме доказателството.

Публикувано в годишника на факултета, скицираното доказателство остава незабелязано. За съжаление по същото време младият тогава съветски математик Б. Коренблюм публикува в *Успехи математических наук* [9] по същество същото доказателство, но значително по-добре редактирано и шлифовано. Препечатано от Шилов в неговия знаменит учебник [11], именно то завоюва изключителна популярност.

Тук се натъкваме на явление, което не искам да отмина с мълчание. Публикациите на Обрешков често съдържат блестящи идеи, но са твърде дълги и по правило — небрежно написани. В тях важното и второстепенното водят „мирно съвместно съществуване“. Резултатът от подобна стратегия може да бъде само един — липса на популярност. Например разглежданата работа [8] е изключително богата по съдържание. Освен скицираното доказателство на теоремата на Бернщейн там намираме и елегантно доказателство на теоремата на Хаусдорф за моментите, както и скица на многомерния вариант на разгледаната теорема на Бернщейн. Наред с това обаче работата съдържа и различни варианти и отклонения, които развалят общото впечатление.

Една от последните работи на Обрешков [10] съдържа съществено обобщение на друга класическа теорема на Бернщейн, отнасяща се до регулярно монотонните функции. Ето нейната формулировка.

Теорема (С. Н. Бернщейн). *Нека реалната функция f е регулярно монотонна в крайния интервал (α, β). Тогава, каквото и да бъде числото $b \in (\alpha, \beta)$, равенството*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(b)}{\nu!}(x-b)^\nu$$

е в сила в интервала $\alpha < x \leqq b$ и следователно ни позволява да продължим f аналитично в кръга $|z-b| < b-\alpha$.

Кратко и елегантно доказателство на тази теорема може да се намери в учебника на Тагамлицки [12].

За да обобщи този резултат на Бернщейн, Обрешков изхожда от едно сполучливо разширение на понятието регулярно монотонна функция.

Дефиниция (Н. Обрешков). Нека f е комплексна функция, дефинирана и безбройно много пъти диференцируема в крайния интервал (a, b).

Казваме, че f е *регулярно монотонна в смисъл на Обрешков*, когато са изпълнени следните изисквания:

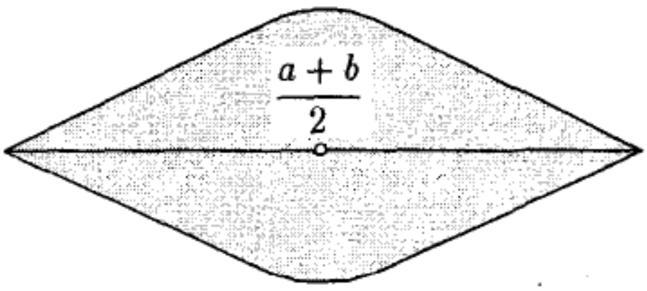
А) За всяко фиксирано $n \geqq 0$ функцията $\left|f^{(n)}(x)\right|$ е или монотонно растяща, или монотонно намаляваща в целия интервал (a, b).

Б) Когато x описва (a, b), стойностите на $f^{(n)}(x)$ лежат в някакъв ъгъл A_n с връх в началото и с големина, ненадминаваща $\pi - \delta$, където числото $\delta > 0$ не зависи от n.

Ясно е, че всяка регулярно монотонна функция е регулярно монотонна и в смисъл на Обрешков.

Сега вече мога да формулирам основния резултат на Обрешков.

Теорема 8. *Ако f е регулярно монотонна в смисъл на Обрешков в интервала (a, b), то тя се продължава аналитично поне в областта, която се получава като прекараме допирателните от точките $(a, 0)$ и $(b, 0)$ към окръжността* $\left|z - \dfrac{a+b}{2}\right| < \dfrac{b-a}{4e}$ (фиг. 1).



Фиг. 1

Доказателството на Обрешков се различава съществено от всички доказателства, дадени в реалния случай. Обрешков изхожда от едно представяне на n-тото нютоново частно, което се получава като приложим комплексния вариант на теоремата за средните стойности към интеграла в (17). (Сравнете с [13, с. 72–73].)

Доказателството на Обрешков непосредствено се обобщава за функции със стойности в крайномерни векторни пространства. За съжаление тук не мога да дам повече подробности.

ON THE INVESTIGATIONS OF NIKOLA OBRESHKOFF CONNECTED WITH THE REGULARLY MONOTONIC FUNCTIONS

(Summary)

Academician N. Obreshkoff came across this field of research studying the connections between some of his theorems about summability of a class of divergent series by typical means. His earlier result in this direction reads as follows:

Theorem 1 ([1]). *Suppose φ and ψ are real-valued functions defined for $x > x_0$ and belonging to the class $C^n(x_0, +\infty)$, where $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \geqq 1$. Further let the limits $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = a$, $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = b$ exist. If $\psi^{(n)} \neq 0$ in the whole interval $x > x_0$, the inequality*

$$\left|\varphi^{(n)}(x)\right| \leqq \left|\psi^{(n)}(x)\right|, \quad x > x_0, \tag{I}$$

implies the inequality

$$|\varphi(x) - a| \leqq |\psi(x) - b|, \quad x > x_0. \tag{II}$$

Obreshkoff's proof is based on the well-known integral representation of the n-th differences of φ and ψ (see (3) and (4) in the text), which leads to the decisive estimate

$$|\Delta_h^n \varphi(x)| \leqq |\Delta_h^n \psi(x)|, \quad x > x_0,\ h > 0. \tag{III}$$

Letting $h \to +\infty$ in (III), Obreshkoff completes the proof.

In the second paper [2] of this series of publications we find a deeper result.

Theorem 2 ([2]). *Let f and φ be real-valued functions in $C^n(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, $n \geqq 1$, and let $\varphi^{(n)} \neq 0$ for $x > a$. Suppose further that there exists an infinite sequence $\{x_\nu\}_0^\infty \to +\infty$, $x_\nu > a$, and an integer m, $0 \leqq m < n$, such that the limits*

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{f(x_\nu)}{x_\nu^m} = A, \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^m} = B \tag{IV}$$

exist. Then the inequality

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqq \left|\varphi^{(n)}(x)\right|, \quad x > a, \tag{V}$$

implies the inequality

$$\left|f^{(m)}(x) - m!\,A\right| \leqq \left|\varphi^{(m)}(x) - m!\,B\right|, \quad x > a. \tag{VI}$$

Obreshkoff gives two proofs of this theorem. The first one uses his formula (9) (see the text) for the n-th divided differences of f and ψ, whereas his second proof is based on the Montel formula (17).

In [4–6] Obreshkoff simplifies his methods and begins considering one-sided inequalities. The following theorem is typical.

Theorem 3 ([4]). *Let φ and ψ be real-valued functions in $C^n(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$, and let the inequality*

$$\varphi^{(n)}(x) \leqq \psi^{(n)}(x), \quad x < a, \tag{VII}$$

hold. Suppose in addition that the limits

$$\lim_{x_\nu\to-\infty} \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^m} = A, \quad \lim_{x_\nu\to-\infty} \frac{\psi(x_\nu)}{x_\nu^m} = B,$$

exist for some integer m, $0 \leqq m < n$, and for a sequence $\{x_\nu\} \to -\infty$. Then we have

$$\varphi^{(m)}(x) - m!\,A \leqq \psi^{(m)}(x) - m!\,B, \quad x < a. \tag{VIII}$$

By applying Theorem 3 with $\psi(x) = e^x$, $m = 0$, $A = B = 0$, Obreshkoff obtains an interesting characterization of the exponential function.

Theorem 4. *Let $f \in C^n(-\infty, 0]$, $n \geqq 1$, and the inequality*

$$f(x) \leqq e^x, \quad x \leqq 0, \tag{IX}$$

is satisfied. If in addition we have $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ and $f(0) = 1$, then $f(x) = e^x$ for $x \leqq 0$.

After 1950 Obreshkoff's scientific interest came closer to Bernstein's subjects. In particular, in [8] we find the following

Theorem 5. *Let f be a real-valued function in $C^{n+1}(a, +\infty)$ and let*

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geqq 0 \quad \text{for } x > a,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n+1. \tag{X}$$

Then the representation

$$f(x) = \delta + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int\limits_x^\infty (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \quad \left(\delta = \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) \tag{XI}$$

holds.

As a corollary of Theorem 5 Obreshkoff gets a simple proof of the classical Bernstein's integral representation of the regularly monotonic functions in the interval $(0, +\infty)$. Indeed, if we set $\tau = \dfrac{n}{t}$ in (XI) and take $\delta = 0$, we obtain (23), where $\{\alpha_n\}$ is a bounded sequence of increasing functions. By means of the well-known Helly's theorems, passing to limit in (23), Obreshkoff gets (21). Independently, at the same time a similar proof has been published by B. Korenblum in [9]. In fact, the remarkable paper [8] also contains a draft of a proof of the multidimensional version of (21), an original solution of the classical Hausdorff moment problem and of its analogue for multiple sequences as well.

In his last publication [10] Obreshkoff gives an interesting generalization of the Bernstein theorem about the analyticity of the regularly monotonic functions. In order to state the Obreshkoff's result we need a definition.

Definition. Let (a, b) be a finite interval on the real axis and let f be a complex-valued function in $C^\infty(a, b)$. We say that f is regularly monotonic in Obreshkoff's sense if it has the following properties:

a) For any $n \geqq 0$ the function $x \to \left|f^{(n)}(x)\right|$ is either increasing or decreasing in (a, b).

b) For any $n \geqq 0$ there exists an angle A_n with a vertex at the origin of the complex plane $\mathbb{C}$ and with a magnitude $|A_n| \leqq \pi - \delta$, $\delta > 0$ (δ does not depend on n). such that when x varies in (a, b), all the values of $f^{(n)}$ lie in A_n.

Now we state the last result of Obreshkoff.

Theorem 6 ([10]). *If f is regularly monotonic in (a,b) in Obreshkoff's sense, it is analytic in the domain D, $D \subset \mathbb{C}$, enclosed by two arcs of the circle $\left|z - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{4e}$ and four segments of the tangents to that circle passing through $(a,0)$ and $(b,0)$, respectively* (Fig. 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Обрешков, Н. Върху сумирането на редовете с типичните средни. — Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **41**, кн. 1, 1944–1945, 103–141.
2. Обрешков, Н. Върху някои неравенства за функциите на реални променливи. — Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **42**, кн. 1, 1945–1946, 213–238.
3. Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей. Физматгиз, М., 1959.
4. Obreshkoff, N. Sur quelques inéqualités pour les differences des fonctions d'une variable réelle. — C. R. de l'Acad. Sci. Paris, **224**, 1947, 880–882. (Препечатана в „Съчинения", т. 2, 226–227.)
5. Обрешков, Н. О некоторых неравенствах для разностей от функций действительного переменного. — ДАН СССР, **59**, № 8, 1948, 1399–1401. (Препечатана в „Съчинения", т. 2, 287–289.)
6. Обрешков, Н. Нови неравенства за разликите на редиците и на функциите и производните им. — Известия КНК, **3**, № 1, 1947, 1–40.
7. Тагамлицки, Я. Функции, които удовлетворяват известни неравенства върху реалната ос. — Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **42**, кн. 1, 1945–1946, 239–256.
8. Обрешков, Н. Върху някои класи от функции. — Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **51**, кн. 1, 1951, 237–258. (Препечатана в „Съчинения", т. 2, 319–334.)
9. Коренблюм, Б. И. О двух теоремах из теории абсолютно монотонных функциях. — Успехи мат. наук, том IV, вып. 4, 1951, 172–175.
10. Обрешков, Н. Върху регулярно-монотонните функции. — Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **56**, кн. 1, 1961–1962, 27–33.
11. Шилов, Г. Е. Математический анализ, специальный курс. М., 1961.
12. Тагамлицки, Я. Диференциално смятане. IV изд., Наука и изкуство, С., 1967, 311–312.
13. Goursat, E. Cours d'Analyse Mathematique. T. II, Paris, 1911.

Received on 27.06.1996