ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 87, 1993

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 87, 1993

ПРИЛОЖЕНИЕ НА МЕТОДИТЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА МОРФОЛОГИЯ В ТЕОРИЯТА НА РАЗМИТИТЕ МНОЖЕСТВА

АНТОНИЙ ПОПОВ

Антоний Попов. ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОРФОЛОГИИ В ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

В настоящей работе отмечены основные свойства морфологических операций над полных решетках — дилатации, эрозии, открытия и замыкания. Доказывается, что определения Вермана и Пелега нечетких морфологических операторов (см. [10]) вписываются в более общую концепцию нечеткой морфологии, которая введена в работе [9] и базируется на понятии индикатора. В последней части, с помощью дилатации Вермана и Пелега, рассматривается понятие нечеткой дифференцируемой функции. Это определение аналогично определению из работы [5]. Здесь исправлена ошибка, допущенная в [5], которая возникает из-за того, что нельзя определить Хаусдорфовое расстояние между пустым и непустым множеством.

Antony Popov. AN APPLICATION OF THE MATHEMATICAL MORPHOLOGY METHODS IN FUZZY SETS THEORY

In this paper we briefly recall the definition of a complete lattice and some basic properties of morphological operations — dilations, erosions, openings and closings, used in the sequel. For completeness, we recall the properties of the dilations and erosions in the family of convex compact sets in $\Re^n$. In this paper special emphasis is set on the fuzzy dilation and fuzzy erosion. It is shown also how Werman and Peleg's operations could be defined in the more general indicator framework. In the last section of the paper it is shown how the Werman and Peleg's notion of fuzzy dilation can be used to define the concept of Frechet-type derivative of a fuzzy function. The presented approach is analogous to those in [5], but a contradiction in Puri and Ralescu's definition is overcome.

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Методът на математическата морфология е създаден от Сера и Матерон [4, 7], работещи по проблемите на минералогията и петрографията, по-точно по определяне на свойствата на порести материали в зависимост от тяхната геометрична структура. Основната идея на техния подход е сравняването на геометричната структура на изображението с малки образци, налагайки ги на различни места по изображението.

Първоначално математическата морфология е разработена за анализ на двоични изображения, които могат да бъдат интерпретирани математически като множества. Съответните морфологични оператори се изграждат на базата на теоретико-множествените операции обединение, сечение, допълнение и на геометричното преобразование транслация. Но по-нататък се появява нуждата от по-мощна теория, работеща върху пространства от затворените множества на дадено топологично пространство, от изпъкналите подмножества на линейно пространство, а също така и върху функционални пространства, като целта е да се анализират полутонови изображения. Пръв Сера [8] забелязва, че пространството, върху което действат морфологичните оператори, трябва да има свойствата на пълна решетка.

Настоящата работа използва дефиницията на морфологичните оператори дилатация и ерозия във вида, даден в [2]. За пълнота са представени някои широко известни примери на такива операции. Основното ударение е поставено върху описанието на морфологичните операции върху пространства от размити множества. Както е известно от работите на Верман и Пелег [10], полутоновите изображения могат да се интерпретират като размити множества. Дефинирането на морфологични операции върху размити множества дава друг поглед върху анализа на полутонови изображения с помощта на методите на математическата морфология и предоставя възможност за директно пренасяне на методи за анализ от двоични изображения към полутонови изображения. В светлината на морфологичните операции елегантно се изследват изпъкнали размити множества и се въвежда понятието диференцируема размита функция. Въведена е производна от тип на Фреше, която е аналог на производна на множественозначна функция [5].

2. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА МОРФОЛОГИЯ[1]

Едно от основните свойства на математическата морфология е това, че дефиниционната област на морфологичните оператори е пълна решетка, която ще означаваме с $\mathcal{L}$. Това означава, че в $\mathcal{L}$ е зададена частична

[1] Детайлно описание на основните свойства на морфологичните оператори читателят може да намери в работите на Матерон [4], Сера [7, 8], Хайманс и Ронс [2].

наредба „$\leq$“ и всяко подмножество $\mathcal{H}$ на $\mathcal{L}$ притежава точна горна и точна долна граница, означавани съответно с $\bigvee \mathcal{H}$ и $\bigwedge \mathcal{H}$. Идентитета върху $\mathcal{L}$ ще означаваме с e, а минималния и максималния елемент на $\mathcal{L}$ — съответно с O и I. Операторите, действащи върху $\mathcal{L}$, също притежават наредба $\varphi \leq \psi$, означаваща $\varphi(X) \leq \psi(X)$ за всяко $X \in \mathcal{L}$. Тук ще разгледаме само дистрибутивни решетки, т.е. такива, за които

$$X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z),$$
$$X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z).$$

Дефиниция. Операторът $\psi : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$ се нарича:
- *дилатация*, ако $\psi(\bigvee_{i\in I} X_i) = \bigvee_{i \in I} \psi(X_i)$ и $\psi(O) = O$;
- *ерозия*, ако $\psi(\bigwedge_{i\in I} X_i) = \bigwedge_{i \in I} \psi(X_i)$ и $\psi(I) = I$.

Дилатациите и ерозиите са монотонно растящи оператори. Казва се, че двойката (ε, δ) е *спрегната*, ако за всеки два елемента $X, Y \in \mathcal{L}$ е изпълнено

$$\delta(X) \leq Y \iff X \leq \varepsilon(Y).$$

Следващите твърдения са доказани в [2].

Теорема 2.1. *Ако (ε, δ) е спрегната двойка оператори над решетката $\mathcal{L}$, то ε е ерозия, а δ е дилатация.*

Теорема 2.2. *Ако δ е дадена дилатация над решетката $\mathcal{L}$, то тя притежава единствена спрегната ерозия ε, и обратно, ако ε е дадена ерозия над решетката $\mathcal{L}$, то тя притежава единствена спрегната дилатация δ.*

Теорема 2.3. *Ако (ε, δ) е спрегната двойка, то $e \leq \varepsilon\delta$ и $\delta\varepsilon \leq e$.*

Лесно могат да се получат следните следствия (вж. [2]):

2.4. Ако (ε, δ) и (ε', δ') са спрегнати двойки, то $(\varepsilon'\varepsilon, \delta\delta')$ е също спрегната двойка.

2.5. Ако $(\varepsilon_i, \delta_i)$ са спрегнати двойки, то $(\bigwedge_i \varepsilon, \bigvee_i \delta)$ е също спрегната двойка.

2.6. Ако (ε, δ) е спрегната двойка, то $\varepsilon\delta\varepsilon = \varepsilon$ и $\delta\varepsilon\delta = \delta$.

Последното от тези твърдения следва от веригите неравенства

$$\delta = \delta e \leq \delta(\varepsilon\delta) = (\delta\varepsilon)\delta \leq e\delta = \delta, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon = e\varepsilon \leq (\varepsilon\delta)\varepsilon = \varepsilon(\delta\varepsilon) \leq \varepsilon e = \varepsilon \tag{2.2}$$

и от монотонността на дилатацията и ерозията.

Операторът $\varphi = \varepsilon\delta$ се нарича *затворена обвивка* и има свойствата $X \leq \varphi(X)$ и $\varphi^2 = \varphi$. Операторът $\psi = \delta\varepsilon$ се нарича *отворено ядро* и притежава свойствата $\psi(X) \leq X$ и $\psi^2 = \psi$. Тези свойства на отворените ядра и затворените обвивки подсказват възможността за използването им при филтриране на сигнали [1]. По-нататък под морфологични оператори над дадена решетка ще разбираме ерозиите, дилатациите, отворените ядра и затворените обвивки.

3. ПРИМЕРИ НА ПЪЛНИ РЕШЕТКИ И МОРФОЛОГИЧНИ ОПЕРАТОРИ, ДЕФИНИРАНИ В ТЯХ

Разглеждаме група от автоморфизми T на $\mathcal{L}$. Един оператор $\psi : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$ се нарича Т-инвариантен, или просто Т-оператор, ако комутира с всеки елемент на T, т.е. $\psi\tau = \tau\psi$ за всяко $\tau \in T$. Лесно се доказва, че ако единият оператор от спрегнатата двойка (ε, δ) е Т-инвариантен, то и другият е такъв. Ако $\tau \in T$, то двойката (τ^{-1}, τ) е Т-инвариантна спрегната двойка. Доказателства на тези прости твърдения могат да бъдат намерени в [2, 8].

Едно подмножество $l \subset \mathcal{L}$ се нарича супремум-генериращо, ако всеки елемент на $\mathcal{L}$ може да се представи като точна горна граница на съвкупност от елементи на l. По-нататък ще разглеждаме само решетки $\mathcal{L}$, притежаващи абелева група автоморфизми T и супремум-генериращо подмножество l със следните свойства:

(i) T запазва l.

(ii) За всеки два елемента $x \in l$ и $y \in l$ съществува $\tau \in T$, така че $\tau(x) = y$.

В свойство (ii) τ е единствено. Да допуснем, че съществуват два автоморфизма τ_1 и τ_2, такива че $\tau_1(x) = \tau_2(x) = y$. Тогава $\tau_1^{-1}\tau_2(x) = x$. Нека z е произволен елемент от l. Следователно съществува $\tau_3 \in T$, тъй че $\tau_3(x) = z$. Тогава

$$\tau_1^{-1}\tau_2(z) = (\tau_1^{-1}\tau_2)\tau_3(x) = \tau_3(\tau_1^{-1}\tau_2)(x) = \tau_3(x) = z,$$

т.е. $\tau_1^{-1}\tau_2$ фиксира всеки елемент от l. Но тъй като l е супремум-генериращо множество и автоморфизмите комутират с операцията точна горна граница, следва, че $\tau_1^{-1}\tau_2 = e$, с което единствеността е доказана.

Като следваме [2], нека фиксираме елемент $o \in l$, който ще наричаме *начало*. Нека $h \in l$ е произволен елемент. С τ_h означаваме единствения автоморфизъм от T, довеждащ o в h. Нека A е произволен елемент на $\mathcal{L}$. Означаваме $l(A) = \{a \in l : a \leq A\}$. Тогава можем да дефинираме следните операции:

$$\delta_A = \bigvee_{a \in l(A)} \tau_a, \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_A = \bigwedge_{a \in l(A)} \tau_a^{-1}. \tag{3.2}$$

От твърдение (2.5) и от факта, че (τ_a^{-1}, τ_a) е Т-инвариантна спрегната двойка, следва, че $(\varepsilon_A, \delta_A)$ е спрегната Т-инвариантна двойка оператори. В [2] е доказано, че при така направените предположения за решетката $\mathcal{L}$ всяка Т-инвариантна двойка има вида (3.1)–(3.2). По-нататък A ще наричаме *структурен елемент*. Освен това при произволни A и B от $\mathcal{L}$ имаме $\delta_A(B) = \delta_B(A)$.

Пример 1. Нека $\mathcal{L}$ е съвкупността от всички подмножества на дадено линейно пространство M над полето от реалните числа с релация на наредба $A \subset B$. Точна горна и точна долна граница се задават посредством операциите обединение и сечение, а именно:

$$\bigvee\{H_i : i \in I\} = \bigcup_{i\in I} H_i,$$

$$\bigwedge\{H_i : i \in I\} = \bigcap_{i\in I} H_i.$$

Супремум-генериращо подмножество може да се зададе чрез

$$l = \{\{x\} : x \in M\}.$$

Като група от автоморфизми T може да се разгледа групата на транслациите [2]. Ще бележим $X_a = \tau_a(X) = \{x+a : x \in X\}$. За начало вземаме нулевия елемент на пространството M. Тогава всяка Т-инвариантна дилатация представлява сума на Минковски с някакво фиксирано множество A (вж. [2]), а именно:

$$\delta(X) = X \oplus A = \bigcup_{a\in A} X_a = \{x + a : x \in X,\ a \in A\}.$$

Съответната спрегната ерозия е разлика на Минковски със същото множество, т.е.

$$\varepsilon(X) = X \ominus A = \bigcap_{a\in A} X_{-a}.$$

В случая $\mathcal{L}$ представлява Булева решетка, т.е. всеки елемент A притежава допълнителен елемент $A^c = \{x : x \in M, x \notin A\}$. От законите на Де Морган за обединението и сечението следва следната връзка между операциите на Минковски:

$$(X \ominus A)^c = X^c \oplus (-A),$$

където $-A$ означава централно симетричния образ на A. Подробен обзор на свойствата на събирането и изваждането на Минковски е даден в [6]. Разгледаните в този пример оператори се наричат *бинарни морфологични оператори* [7].

Пример 2. Нека $\mathcal{L}$ е съвкупността от всички функции с дефиниционна област линейното пространство над полето от реалните числа M и стойности в $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, като

$$(\bigvee_{i\in I} F_i)(x) = \sup_{i\in I} F_i(x),$$

$$(\bigwedge_{i\in I} F_i)(x) = \inf_{i\in I} F_i(x)$$

за всяко $x \in M$. За всяко $x \in M$ и всяко $t \in \mathbf{R}$ дефинираме функциите

$$f_{x,t}(y) = \begin{cases} t, & \text{при } y = x, \\ -\infty, & \text{при } y \neq x. \end{cases}$$

По този начин дефинираме супремум-генериращо семейство $l = \{f_{x,t} : x \in M,\ t \in \mathbf{R}\}$. За всяко $h \in M$ и всяко $v \in \Re$ задаваме автоморфизма $\tau_{h,v}$ чрез

$$(3.3)\qquad (\tau_{h,v}(F))(x) = F(x-h) + v$$

и $T = \{\tau_{h,v} : h \in M,\ v \in \mathbf{R}\}$. T действа транзитивно върху $\mathcal{L}$, защото

$$\tau_{h,v}(f_{x,t}) = f_{x+h,t+v}.$$

Въвеждаме аналози на операциите на Минковски в $\mathcal{L}$:

$$(3.4)\qquad (F \oplus G)(x) = \sup_{x \in M}(F(x-h) + G(h)),$$

$$(3.5)\qquad (F \ominus G)(x) = \inf_{x \in M}(F(x+h) - G(h)),$$

при допълнителни предположения, че $F(x-h) + G(h) = -\infty$, когато $F(x-h) = -\infty$ или $G(h) = -\infty$, и $F(x+h) - G(h) = \infty$, когато $F(x+h) = \infty$ или $G(h) = -\infty$. Поради свойства 3.1 и 3.2 всяка Т-дилатация има вида (3.4), а всяка Т-ерозия — вида (3.5). Разгледаните в този пример оператори се наричат *полутонови морфологични оператори* [7].

Пример 3. Нека $\mathcal{L}$ е съвкупността от всички изпъкнали компактни множества от $\mathbf{R}^n$ с релация на наредба $A \subset B$. Точна горна и точна долна граница се задават така:

$$\bigvee\{H_i : i \in I\} = \mathrm{cl}(\mathrm{co}(\bigcup_{i \in I} H_i)),$$

където с $\mathrm{co}(A)$ означаваме изпъкналата обвивка на A, а $\mathrm{cl}(A)$ е най-малкото затворено множество, съдържащо A,

$$\bigwedge\{H_i : i \in I\} = \bigcap_{i \in I} H_i.$$

Супремум-генериращо подмножество може да се зададе чрез

$$l = \{\{x\} : x \in \mathbf{R}^n\}.$$

Като група от автоморфизми T ще разгледаме групата на транслациите както в пример 1. Събиране и изваждане на Минковски се дефинират също както в пример 1, а именно:

$$(3.6)\qquad X \oplus A = \{x + a : x \in X, a \in A\},$$

$$(3.7)\qquad X \ominus A = \bigcap_{a \in A} X_{-a}.$$

Очевидно е, че сечението на изпъкнали множества е изпъкнало. Ще покажем, че сумата на Минковски на две изпъкнали множества е изпъкнало. Нека p и q са две точки от $A \oplus B$, където A и B са изпъкнали. Тогава $p = x + y$, $q = u + v$, където x и u принадлежат на A, а y и v — на B. Тогава $\alpha p + (1-\alpha)q = (\alpha x + (1-\alpha)u) + (\alpha y + (1-\alpha)v)$. От изпъкналостта на A и

B следва, че $\alpha x + (1-\alpha)u \in A$ и $\alpha y + (1-\alpha)v \in B$, откъдето получаваме, че $\alpha p + (1-\alpha)q \in A \oplus B$, т.е. $A \oplus B$ е изпъкнало. Лесно се проверява, че сумата на две компактни множества е компактно.

Следователно и в този случай всяка Т-инвариантна дилатация представлява сума на Минковски с подходящ структурен елемент, както и всяка Т-ерозия е разлика на Минковски с подходящ структурен елемент:

$$\delta(X) = X \oplus A = \mathrm{cl}(\mathrm{co}(\bigcup_{a\in A} X_a)), \tag{3.8}$$

$$\varepsilon(X) = X \ominus A = \{y : A_y \subset X\}. \tag{3.9}$$

Нека P и Q са две непразни компактни множества в $\mathbf{R}^n$. Въвеждаме функцията

$$d_h(P,Q) = \inf\{\varepsilon : Q \subset P \oplus B_\varepsilon, P \subset Q \oplus B_\varepsilon\}, \tag{3.10}$$

където $B_\varepsilon = \{x : \|x\| \leq \varepsilon\}$ е кръгът с център в началото $(0,0,\ldots,0)$ и радиус ε. Тази функция притежава следните свойства:

$$d_h(P,P) = 0, \quad d_h(P,Q) > 0 \text{ за } P \neq Q, \tag{3.11}$$

$$d_h(P,Q) = d_h(Q,P), \tag{3.12}$$

$$d_h(P,Q) + d_h(Q,R) \geq d_h(P,R), \tag{3.13}$$

което показва, че тя задава метрика. По-точно това е Хаусдорфовото разстояние [7] и по този начин множеството от компактните множества от $\mathbf{R}^n$ се превръща в пълно метрично пространство [6].

Нека P и Q са две изпъкнали компактни множества в $\mathbf{R}^n$. От свойствата на операцията затворена обвивка знаем, че

$$(P \oplus Q) \ominus Q \supset P. \tag{3.14}$$

В [4], като се използват свойствата на опорните хиперравнини на изпъкналите множества, е доказано и обратното включване:

$$(P \oplus Q) \ominus Q \subset P. \tag{3.15}$$

От двете включвания получаваме равенството

$$(P \oplus Q) \ominus Q = P. \tag{3.16}$$

От равенството $P \oplus Q = R \oplus Q$ следва $P = R$, защото

$$P = (P \oplus Q) \ominus Q = (R \oplus Q) \ominus Q = R.$$

4. РАЗМИТИ МНОЖЕСТВА И МОРФОЛОГИЧНИ ОПЕРАТОРИ ВЪРХУ ТЯХ

Размитите множества са въведени за пръв път от Лотфи Заде и намират широко приложение в системите за управление с елементи на изкуствен интелект, в социологията, психологията, лингвистиката и др. Дефиниция на понятието *размито множество* както и основните свойства могат да бъдат намерени в [11]. Да разгледаме множество $\mathcal{U}$, което наричаме *универсално*. Едно размито подмножество A на универсалното множество $\mathcal{U}$ се отъждествява с произволна функция $\mu_A : \mathcal{U} \mapsto [0,1]$, която се нарича *характеристична функция на* A, а $\mu_A(x)$ се нарича *степен на принадлежност на точката* x *към* A. Обичайните подмножества на $\mathcal{U}$ могат да се разглеждат като частен случай на размити множества, при които характеристичната функция взема стойности само в крайните точки на интервала $[0,1]$. Теоретико-множествените операции и релации се обобщават естествено за размити множества по следния начин:

- $A \subset B$, ако $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \forall x \in \mathcal{U}$;
- $A \cap B = C$, ако $\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \forall x \in \mathcal{U}$;
- $A \cup B = C$, ако $\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \forall x \in \mathcal{U}$;
- допълнение на A е множеството A^c с характеристична функция

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

Празно размито множество $\varnothing$ се нарича множеството с характеристична функция константата 0, а универсалното множество $\mathcal{U}$ се отъждествява с размитото множество с характеристична функция константата 1. Точна горна и точна долна граница на система размити множества $\{H_i : i \in I\}$ се дефинират по следния начин:

$$U = \bigvee_{i \in I} H_i, \quad \mu_U(x) = \sup\{\mu_{H_i}(x) : i \in I\}, \tag{4.1}$$

$$L = \bigwedge_{i \in I} H_i, \quad \mu_L(x) = \inf\{\mu_{H_i}(x) : i \in I\}. \tag{4.2}$$

Точна горна граница на система от две множества е тяхното обединение, а точна долна граница — тяхното сечение. По този начин съвкупността $\mathcal{L}$ от размити подмножества на $\mathcal{U}$ се превръща в Булева решетка. Може да се дефинира и група $T = \{\tau_a : A \in \mathbf{R}^n\}$ от автоморфизми-транслации $\tau_a(X) = X_a$, $\mu_{X_a}(y) = \mu_X(y-a)$. Представлява проблем обаче намирането на супремум-генериращо семейство размити множества. За дефинирането на двойки спрегнати дилатации и ерозии помага понятието *индикатор* [9]. Индикатор се нарича функцията $I : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \mapsto [0,1]$ със следните 8 свойства:

1. $I(A,B) = 0 \iff \{x : \mu_A(x) = 1\} \cap \{x : \mu_B(x) = 0\} \neq 0$.
2. От $B \subset C$ следва $I(A,B) \leq I(A,C)$.
3. От $B \subset C$ следва $I(C,A) \leq I(B,A)$.
4. $I(A,B) = I(\tau_x(A), \tau_x(B))$.
5. $I(A,B) = I(B^c, A^c)$.
6. $I(\bigvee_{i\in J} B_i, A) = \inf_{i\in J} I(B_i, A)$.
7. $I(A, \bigwedge_{i\in J} B_i) = \inf_{i\in J} I(A, B_i)$.
8. $I(A, \bigvee_{i\in J} B_i) \geq \sup_{i\in J} I(A, B_i)$.

Разглеждаме следните функции:

$$I_1(A,B) = \inf_{x\in\mathcal{U}} \min[1, \lambda(\mu_A(x)) + \lambda(1-\mu_B(x))], \tag{4.3}$$

където $\lambda : [0,1] \mapsto [0,1]$ е вдлъбната, строго монотонно намаляваща функция, за която $\lambda(0) = 1$ и $\lambda(1) = 0$, и

$$I_2(A, B) = \inf_{x \in \mathcal{U}} \max[\mu_B(x), 1 - \mu_A(x)]. \tag{4.4}$$

Теорема 4.1. *Условията 1–8 се удовлетворяват от функциите I_1 и I_2.*

Доказателство. За верността на твърдението за I_1 вж. работата на Синха и Дохерти [9]. Тук ще докажем твърдението и за I_2. Свойство 1, монотонните свойства 2 и 3, както и свойства 4 и 5 следват непосредствено от дефиницията. Ще докажем свойство 7. Свойства 6 и 8 следват аналогично. За краткост на записа ще изпускаме индекса 2.

$$I(A, \bigwedge_i B_i) = \inf_x \max(\inf_i \mu_{B_i}(x), 1 - \mu_A(x))$$

$$= \inf_x \{\inf_i [\max(\mu_{B_i}(x), 1 - \mu_A(x))]\}$$

$$= \inf_i \{\inf_x [\max(\mu_{B_i}(x), 1 - \mu_A(x))]\}.$$

Предпоследното от равенствата следва от равенството

$$\max(\inf_i a_i, c) = \inf_i \max(a_i, c),$$

изпълнено за произволни реални числа a_i и c, което представлява обобщение на закона на Де Морган. Комутативността на двата инфимума, от която следва последното равенство, е очевидна. С това свойство 7 е доказано. ∎

Индикаторът I_1 в [9] се нарича *индикатор на включването*, защото от $A \subset B$ следва $I_1(A, B) = 1$. Ако $\lambda(x) = 1 - x$, в сила е и обратното твърдение. Така $I_1(A, B)$ може да се разглежда като *лингвистична променлива*, вж. [11], описваща понятието $A \subset B$.

С помощта на понятието *индикатор* ще дефинираме оператор ε_A за всяко размито множество A с равенството

$$\mu_{\varepsilon_A(B)}(x) = I(\tau_x(A), B)$$

и оператор δ_A с равенството

$$\delta_A(B) = (\varepsilon_{-A}(B^c))^c.$$

Оттук нататък, ако е дадено размито множество A, за краткост ще означаваме $A(x)$ вместо $\mu_A(x)$.

Теорема 4.2. *Дефинираните чрез I_1 оператори при дадена функция λ и размито множество A образуват спрегната двойка $(\varepsilon_A, \delta_A)$.*

Доказателството на това твърдение е скицирано в [9].

Теорема 4.3. *От дефинираните чрез I_2 оператори при дадено размито множество A δ_A винаги е дилатация, а ε_A винаги е ерозия.*

Доказателство. Свойствата

$$\delta_A(\bigwedge_i B_i) = \bigwedge_i \delta(B_i), \tag{4.5}$$

$$(4.6) \qquad \varepsilon_A(\bigvee_i B_i) = \bigvee_i \varepsilon(B_i)$$

следват директно от свойство 7 на индикаторите. Тъй като

$$(\delta_A(B))(x) = \sup_b \min(A(b), B(x-b)),$$

то $(\delta_A(\varnothing))(x) = \sup_b \min(A(b), 0) = 0$, т. е. $\delta_A(\varnothing) = \varnothing$. Така получаваме, че δ_A е дилатация.

$$(\varepsilon_A(B))(x) = \inf_b \max(B(b), 1 - A(b-x)),$$

следователно $(\varepsilon_A(\mathcal{U}))(x) = \inf_b \max(1, 1 - A(b-x)) = 1$, т. е. $\varepsilon_A(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Могат да бъдат дадени примери, когато за някое A двойката $(\varepsilon_A, \delta_A)$ не е спрегната — например когато $\mu(A) = 0{,}5$.

5. РАЗМИТИ ИЗПЪКНАЛИ МНОЖЕСТВА И ДИФЕРЕНЦИРУЕМОСТ НА РАЗМИТИ ФУНКЦИИ

Тук разглеждаме операторите, дефинирани с индикатора I_2 в съвкупността от размити множества над $\mathbf{R}^n$.

$$(5.1) \qquad (\delta_A(B))(x) = \sup_{b \in \mathbf{R}^n} \min(A(b), B(x-b)),$$

$$(5.2) \qquad (\varepsilon_A(B))(x) = \inf_{b \in \mathbf{R}^n} \max(B(b), 1 - A(b-x)).$$

Нека A е размито множество, а $\alpha \in (0,1]$. С ${}_\alpha A$ бележим *α-отреза* на A:

$$(5.3) \qquad {}_\alpha A = \{x \in \mathbf{R}^n : A(x) \geq \alpha\}.$$

Тогава дилатацията се представя като

$$(5.4) \qquad (\delta_A(B))(x) = \sup\{\alpha : x \in {}_\alpha A \oplus {}_\alpha B\}.$$

Размитото множество A се нарича *изпъкнало*, ако

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(A(x_1), A(x_2))$$

за всеки $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$ и $\lambda \in [0,1]$.

Лема 5.1. *Едно размито множество е изпъкнало тогава и само тогава, когато неговите α-отрези са изпъкнали при $\alpha \in (0,1]$.*

Доказателство. Нека A е изпъкнало. Нека $\alpha \in (0,1]$ е такова, че ${}_\alpha A \neq \varnothing$, и $x_1, x_2 \in {}_\alpha A$. Тогава $A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \alpha$.

Обратно, нека ${}_\alpha A$ е изпъкнало за всяко $\alpha \in (0,1]$. Нека $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$, $\alpha = \min(A(x_1), A(x_2))$ и $0 < \lambda < 1$. Тогава $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in {}_\alpha A$, т.е.

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \alpha = \min(A(x_1, A(x_2)),$$

което показва, че A е изпъкнало.

Разглеждаме пространство $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ от размити множества A със следните свойства:

1. Функцията μ_A е полунепрекъсната отгоре.
2. A е изпъкнало.
3. ${}_\alpha A$ е компактно в $\mathbf{R}^n$ за всяко $\alpha \in (0,1]$.
4. $\bigcup\{{}_\alpha A : \alpha > 0\}$ е ограничено.

В $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ въвеждаме *събиране* и *умножение с неотрицателен скалар* по следния начин:

$$A + B = \delta_A(B), \tag{5.5}$$

$$(\lambda A)(x) = \begin{cases} A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) & \text{при } \lambda \neq 0, \\ 0 & \text{при } \lambda = 0,\ x \neq 0, \\ 1 & \text{при } \lambda = 0,\ x = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Непосредствено се проверява, че

$$0A = \Omega, \quad \Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x \neq 0, \end{cases}$$

и за всяко $B \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ имаме $B + \Omega = B$.

В $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ можем да въведем метрика [5]

$$d(A,B) = \sup_{\alpha>0} d_h({}_\alpha A, {}_\alpha B), \tag{5.7}$$

където d_h е дефинираното чрез (3.10) хаусдорфово разстояние. Като използваме пълнотата на пространството от непразните компактни множества, снабдено с хаусдорфовата метрика [4], лесно се проверява, че $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ е също пълно метрично пространство с метрика d.

Теорема 5.2. *Ако A и B принадлежат на $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$, то ${}_\alpha(A + B) = {}_\alpha A \oplus {}_\alpha B$.*

Доказателство. $(A + B)(x) = \sup\{\alpha : x \in {}_\alpha A \oplus {}_\alpha B\}$. Нека $x \in {}_\alpha A \oplus {}_\alpha B$. Тогава съществува $\beta \geq \alpha$ такова, че $(A + B)(x) = \beta$, т. е. $x \in {}_\beta(A + B) \subset {}_\alpha(A + B)$, или

$${}_\alpha A \oplus {}_\alpha B \subset {}_\alpha(A + B). \tag{5.8}$$

Обратно, нека $x \in {}_\alpha(A + B)$, като $(A + B)(x) = \alpha$.

$$(A + B)(x) = \sup\{\beta : x \in {}_\beta A \oplus {}_\beta B\}. \tag{5.9}$$

Разглеждаме строго монотонно растяща редица $\{\alpha_i\}_{i=1,2,\ldots}$, клоняща към α. α_i не е горна граница в (5.9), следователно за всеки номер i съществуват $x_i \in \mathbf{R}^n$ и $y_i \in \mathbf{R}^n$ такива, че

$$x = x_i + y_i, \quad A(x_i) \geq \alpha_i, \quad B(y_i) \geq \alpha_i.$$

Редицата $\{x_i\}$ е ограничена, защото $x_i \in {}_{\alpha_1}A$, което е компактно по условие. Тогава можем да изберем сходяща подредица $\{x_{i_k}\}$ и нека означим с x_0 нейната граница. Следователно съществува и границата

$$y_0 = \lim_{k\to\infty} y_{i_k} = x - \lim_{k\to\infty} x_{i_k}.$$

Тогава $x = x_0 + y_0$, а от полунепрекъснатостта отгоре на μ_A и μ_B следва $A(x_0) \geq \alpha$ и $B(x_0) \geq \alpha$, т. е. $x \in {}_\alpha A \oplus {}_\alpha B$. Оттук получаваме

$$(5.10) \qquad {}_\alpha A \oplus {}_\alpha B \supset {}_\alpha(A + B).$$

От двете включвания (5.8) и (5.10) следва верността на теоремата. ■

Следствие 5.3. *Нека A, B и C са размити множества от $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$. Тогава от $A + C = B + C$ следва $A = B$.*

Следствие 5.4. *Нека A, B и C са размити множества от $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$. Тогава $d(A + C, B + C) = d(A, B)$.*

Разглеждаме множеството $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$. Като следваме познатата конструкция (вж. [5]), ще изградим линейно нормирано пространство. В $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ въвеждаме релация на еквивалентност

$$(A, B) \sim (A', B') \iff A + B' = B + A'.$$

Означаваме с $\mathcal{B}$ факторизираното пространство по отношение на тази релация. Ще покажем, че $\mathcal{B}$ е пълно линейно нормирано пространство. Да означим с $\langle A, B\rangle$ съвкупността от елементи на $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$, еквивалентни на (A, B). Сума на два елемента на $\mathcal{B}$ дефинираме чрез равенството

$$\langle A, B\rangle + \langle C, D\rangle = \langle A + C, B + D\rangle.$$

Противоположен елемент на $\langle A, B\rangle$ наричаме $\langle B, A\rangle$. Произведението със скалар $c \in \mathbf{R}$ се задава така:

$$c\langle A, B\rangle = \begin{cases} \langle cA, cB\rangle & \text{при } c \geq 0, \\ \langle (-c)B, (-c)A\rangle & \text{при } c < 0. \end{cases}$$

Нулев елемент на $\mathcal{B}$ е $\langle A, A\rangle$, защото

$$\langle A, A\rangle + \langle B, C\rangle = \langle A + B, A + C\rangle = \langle B, C\rangle,$$

тъй като $(A + B, A + C) \sim (B, C)$.

Зависимостите

$$(5.11) \qquad \alpha\langle A, B\rangle + \alpha\langle C, D\rangle = \alpha\langle A + C, B + D\rangle,$$

$$(5.12) \qquad \alpha\langle A, B\rangle + \beta\langle A, B\rangle = (\alpha + \beta)\langle A, B\rangle$$

се проверяват непосредствено. Оттук следва, че $\mathcal{B}$ е линейно пространство. Разлика на два елемента на $\mathcal{B}$ се определя стандартно по следния начин:

$$\langle A, B\rangle - \langle C, D\rangle = \langle A, B\rangle + (-1)\langle C, D\rangle = \langle A + D, B + C\rangle.$$

Норма в $\mathcal{B}$ ще дефинираме чрез метриката в $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$:

$$(5.13) \qquad \|\langle A, B\rangle\| = d(A, B),$$

където d е разстоянието, дефинирано чрез (5.7), вж. [5]. Ще се уверим, че тази функция е действително норма:

1. $0 = \|\langle A, B\rangle\| \iff d(A, B) = 0 \iff A = B \iff \langle A, B\rangle = 0$.
2. $\|c\langle A, B\rangle\| = d(|c|A, |c|B) = |c|d(A, B) = |c|\,\|\langle A, B\rangle\|$.
3. $\|\langle A, B\rangle + \langle C, D\rangle\| = \|\langle A + C, B + D\rangle\| = d(A + C, B + D)$

$\leq d(A+C, B+C) + d(C+B, D+B) = ||\langle A, B\rangle|| + ||\langle C, D\rangle||.$

Пълнотата на $\mathcal{B}$ следва от пълнотата на метричното пространство $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ с метрика d. $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ ще вложим изометрично в подпространството $\mathcal{Y}$ на $\mathcal{B}$, породено от елементите $\{\langle A, \Omega\rangle : A \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)\}$, т. е. въвеждаме изображението $Y : \mathcal{C}(\mathbf{R}^n) \mapsto \mathcal{Y}$ чрез равенството

$$Y(A) = \langle A, \Omega\rangle.$$

Изометричността следва от равенството

$$d(A, B) = ||\langle A, B\rangle|| = ||\langle A, \Omega\rangle + \langle \Omega, B\rangle|| = ||Y(A) - Y(B)||.$$

Нека X е подмножество на $\mathbf{R}^m$, съдържащо точката a заедно с една нейна околност $B_\varepsilon(a)$. Размита функция f наричаме изображение $f : X \mapsto \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$. Функцията f ще наричаме диференцируема в точката a, ако съществува линейно изображение $K : \mathbf{R}^m \mapsto \mathcal{Y}$ такова, че

$$\lim_{x \to a} \frac{||Y(f(x)) - Y(f(a)) - K(x-a)||}{|x-a|} = 0, \tag{5.14}$$

където $|\cdot|$ е произволна норма в $\mathbf{R}^m$. Ще наречем K производна на f в точката a и ще бележим с $f'(a)$. Така дефинираната производна съвпада с тази, дефинирана в [5]. Избегнати са някои противоречия, например там се задава влагането $Y(A) = \langle A, \varnothing\rangle$, което не е подходящо, тъй като хаусдорфовото разстояние не е дефинирано за празни множества. Така дефинираната диференцируемост може да послужи при построяване на размити управления на динамични системи и изследване на тяхната устойчивост посредством построяването на аналог на функцията на Ляпунов [3].

Благодарности. Авторът изказва благодарност на рецензентите за ценните препоръки.

Summary

Mathematical morphology has been created firstly as an approach in image processing based on geometrical concepts as transformation groups and metric spaces. It is a method which strength lies in the quantitative description of geometrical structure and shape, and has proved to be useful in many image processing tasks [1]. It has been created originally by Matheron and Serra [4, 7], studying the properties of porous media with respect of their geometrical structure. First, morphological techniques are applied to binary images which can be interpreted mathematically as sets. Corresponding morphological operations are based on set-theoretical concepts and operations like union, intersection, complement, and on geometrical transforms like translations or rotations. Later, the method is extended to spaces of numerical functions for the study of grey-tone images. The initial framework is later replaced by a more general one, namely the framework of complete lattices. (For a number of related results see [2, 8].) So, mathematical morphology is a theory, which appeals to mathematicians since it allows a rigorous mathematical description and derives its tools from several disciplines like algebra, topology and geometry. In this paper we briefly recall the definition of a complete lattice and some basic properties of morphological operations — dilations, erosions, openings and closings, used in the sequel. We use the fact that in the case of binary morphology every translation-invariant dilation is the Minkowski addition and

every translation-invariant erosion is the Minkowski subtraction with an appropriate set, called structuring element [1]. The dilations and erosions in the family of convex compact sets in $\mathbf{R}^n$ are considered also.

It is shown by Werman and Peleg in [10] that grey-tone images could be successfully interpreted as fuzzy sets. Werman and Peleg have made an attempt to apply morphological techniques on the complete lattice of fuzzy sets in $\mathbf{R}^n$. They have defined a fuzzy dilation by equation (5.1) and erosion by equation (5.2). In our paper special emphasis is set on the fuzzy dilation and fuzzy erosion. We denote a fuzzy subset A of an universal set $\mathcal{U}$ via its membership function $\mu_A(x)$. For any element $x \in \mathcal{U}$ $\mu_A(x)$ *denotes the degree to which the element* x *belongs to* A, $\mu_A(x) \in [0,1]$. A general construction of fuzzy morphological operators, based on the so-called indicators, is presented by Sinha and Dougherty in [9]. The indicator $I(A,B)$, where A and B are fuzzy subsets of $\mathbf{R}^n$, is a function defined by a collection of eight axioms (nine axioms in [9]), described in the fourth section of our work. Our paper shows how Werman and Peleg's operations can be defined in the more general indicator framework. In the last section of the paper it is shown how the Werman and Peleg's notion of fuzzy dilation can be used to define the concept of Frechet-type derivative of fuzzy function. The presented approach is analogous to those in [5], but a contradiction in Puri and Ralescu's definition is overcome. This contradiction is based on the fact that the Hausdorff distance between an empty set and a non-empty one is not defined [6]. The proposed notion of differentiable fuzzy function is useful for the theory and the practice of fuzzy control systems [3].

REFERENCES

1. H a r a l i c k, R. M., L. G. S h a p i r o. Computer and robot vision. Vol. 1, Addison-Wesley, 1992.
2. H e i j m a n s, H. J. A. M., C. R o n s e. The algebraic basis of mathematical morphology. — Computer Vision, Graphics and Image Processing, **10**, 1990, 245–295.
3. К у д и н о в, Ю. И. Нечеткие системы управления. — Известия Академии наук СССР, Техническая кибернетика, **5**, 1990, 196–206.
4. M a t h e r o n, G. Random sets and integral geometry. Wiley, N. Y., 1975.
5. P u r i, M. L., D. A. R a l e s c u. *Differentials of fuzzy functions.* — J. of Math. Analysis and Applications, **91**, 1983, 552–558.
6. S c h n e i d e r, R. Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
7. S e r r a, J. Image analysis and mathematical morphology. Academic Press, 1982.
8. S e r r a, J. (Ed.) Image analysis and mathematical morphology. Vol. 2, Theoretical advances. Academic Press, 1988.
9. S i n h a, D., E. D o u g h e r t y. Characterization of fuzzy Minkowski algebra. — SPIE, Vol. 1769 — Image Algebra and Morphological Image Processing III, 1992, 59–68.
10. W e r m a n, M., S. P e l e g. Min-max operators in texture analysis. — IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **7**(2), November 1985, 730–733.
11. Z a d e h, L. Fuzzy sets and their applications to cognitive processes. Academic Press, 1975.

Received on 18.11.1993