ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 87, 1993

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 87, 1993

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

ВЛАДИМИР ЧАКАЛОВ

Владимир Чакалов. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

В работе рассматривается линейная управляемая система на конечном сегменте. Основной результат содержится в теореме 2, где даются условия для существования обобщенных решений, которые „переносят“ объект от одной точки до другой. При том интенсивность I (измеряющая затраченную энергию для перенесения объекта, значения которой суть нормы функционалов подходящего сопряженного пространства) достигает наименьшее значение. Так как интегралы в решении являются неразложимыми элементами единичного шара этого сопряженного пространства, мы можем в некоторых случаях найти их и таким образом уточнить решение системы. Этот подход иллюстрируется на двух примерах.

Vladimir Chakalov. GENERALIZED SOLUTIONS OF LINEAR CONTROL SYSTEMS

In the present paper we consider a linear control system on a finite interval. The main result is Theorem 2, which gives sufficient conditions for the existence of generalized solutions, that steer given object from one point to another. The intensity I (it measures the energy spent to steer the object, and its values are norms of functionals belonging to a convenient conjugate space) achieves its smallest value. Since the integrals involved in the solution are extreme points of the unit ball of the corresponding conjugate space, in some cases we can determine these integrals and thus obtain an effective solution of the given system. We illustrate the method with two examples.

Существуют различные методы для решения задач теории линейного оптимального управления. Один из них является разновидностью классической теории моментов. Он происходит от одной экстремальной задачи, рассматриваемой А. Марковым в конце XIX столетия (см. [1], [2] и [3, стр. 120–130]). В своем первоначальном виде эту задачу можно сформулировать следующим образом.

Пусть F — множество всех действительных функции f, интегрируемых на сегменте $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям

а) $0 \leqq f(x) \leqq L \qquad (x \in [a,b])$,

б) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \alpha_0, \quad \int\limits_a^b x f(x)\,dx = \alpha_1, \ \ldots, \quad \int\limits_a^b x^{n-1} f(x)\,dx = \alpha_{n-1}$,

где $L > 0$, α_0, α_1, ..., α_{n-1} — заданные числа. Найти те функции $f \in F$, для которых интеграл $\int\limits_a^b x^n f(x)\,dx$ достигает наибольшего и наименьшего значения.

А. Марков нашел простое решение этой задачи. Наряду с ней однако он рассмотрел и некоторые далеко идущие обобщения, используя виртуозно аппарат непрерывных дробей. Несмотря на важность полученных результтатов, трудность используемого аппарата не способствовала распространению идей А. Маркова среди математиков. Едва в самом начале тридцатых годов настоящего столетия Н. Ахиезер и М. Крейн обратились к этой тематике. Используя разработанную в то время теорию моментов, они продолжили и углубили исследования А. Маркова. Одна из рассмотренных ими задач это так называемая L-проблема. Ее самый простой вариант формулируется следующим образом [4–7].

Каким условиям должны удовлетворять числа $L > 0$, α_0, α_1, ..., α_{n-1} для того, чтобы условия а) и б) были совместимыми, т. е. чтобы множество F не было пусто.

Эта и сходные с ней задачи получили наименование „L-проблема А. Маркова“. В последующее время М. Крейн обобщил L-проблему и связанные с ней экстремальные задачи для любых чебышевских систем (см. [8]). Подробное изложение его результатов содержится в его известной работе [9], а так же в [10, гл. VII и IX]. Общая формулировка L-проблемы А. Маркова понастоящем следующая:

Пусть X нормированное (действительное или комплексное) линейное пространство, X^* — сопряженное пространство, пусть $L > 0$, α_1, α_2, ..., α_n — заданные числа (действительные или комплексные вместе с X), а x_1, ..., x_n — элементы X. Найти условия, при которых существуют линейные функционалы $\lambda \in X^*$, удовлетворяющие условиям

$$\lambda(x_k) = \alpha_k \quad (k = 1, \ldots, n), \qquad ||\lambda|| \leqq L.$$

Н. Красовский первый заметил в своих работах [11] и [12], что L-проблема А. Маркова является удобным инструментом для решения одной из задач линейного оптимального управления, а именно задача о нахождении управления, минимизирующего т. наз. интенсивность. Полное изложение этого подхода, сочетанное с большим числом приложений, находим в монографии [13, гл. 5 и 6].

В настоящей работе рассматривается та же самая задача. Для ее решения используется одно уточнение L-проблемы А. Маркова (см. [14]). Это позволяет нам найти простые обобщенные решения управляемой системы как в действительном, так и в комплексном случае.

Постановка задачи. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$(1) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

с начальным условием

$$(2) \qquad x(0) = x_0 \neq 0,$$

где $A(t) = \Big(a_{ij}(t)\Big)_{i=1}^{n}{}_{,}{}_{j=1}^{n}$, $B(t) = \Big(b_{kl}(t)\Big)_{k=1}^{n}{}_{,}{}_{l=1}^{m}$ — матрицы, элементы которых суть непрерывные функции на сегменте $[0, T]$, $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — m-мерная векторная функция (управление), компонеты которой — суммируемые функции на сегменте $[0, T]$, $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ — n-мерный вектор, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — решение системы (траектория). Рассматриваемые функции и векторы могут быть как действительными, так и комплексными. Мы объединим рассмотрение этих двух случаев, но на соответствующих местах будем отмечать различия между полученными результатами.

Если u — управление, а $X(t)$ — решение матричной системы $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, при чем $X(0)$ — единичная матрица, то соответствующее решение x системы (1), удовлетворяющее начальному условию (2), задается формулой

$$(3) \qquad x(t) = X(t)\left[x_0 + \int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau\right].$$

Положим для краткости

$$(4) \qquad -X^{-1}(t)B(t) = C(t) = \Big(c_{il}(t)\Big)_{i=1}^{n}{}_{,}{}_{l=1}^{m}.$$

Очевидно, что функции c_{il} непрерывны на сегменте $[0, T]$. Будем обозначать через c_i вектор-функции

$$(5) \qquad c_i = (c_{i1}, \ldots, c_{im}) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Имея ввиду (4), можно дать формуле (3) вид

$$x(t) = X(t)\left[x_0 - \int_0^t C(\tau)u(\tau)d\tau\right].$$

Управление u порождает векторную меру на сегменте $[0, T]$. Поясним, что если $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ — m-мерная (непрерывная) функция, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ — m-мерная векторная мера и $C(t)$ — $(n \times m)$-матрица, элементы которой суть непрерывные функции на $[0, T]$, то

$$\int_0^T Y(t)\,d\mu(t) = \int_0^T Y_1(t)\,d\mu_1(t) + \cdots + \int_0^T Y_m(t)\,d\mu_m(t)$$

и

$$\int_0^T C(t)\,d\mu(t) = \left(\int_0^T C_1(t)\,d\mu(t), \ldots, \int_0^T C_n(t)\,d\mu(t)\right).$$

Совершенно естественно считать, что произвольная векторная мера μ является обобщенным управлением (здесь $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, где μ_l ($l = 1, \ldots, m$) — действительные или комплексные меры вместе с системой (1)). Исходя от этого обобщения понятия управления, мы могли бы заключить, что соответствующее обобщенное решение системы (1) имеет вид

$$x(t) = X(t)\left[x_0 - \int\limits_0^t C(\tau)\,d\mu(\tau)\right]. \tag{6}$$

Такое заключение было бы поспешным, так как не исключено, чтобы мера μ сосредоточивала ненулевую (векторную) „массу" в точку $t = 0$. Тогда очевидно $x(0) \neq x_0$, т. е. траектория не удовлетворяла бы начальному условию (2). Полагая

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } \ t = 0, \\ 1 & \text{для } \ 0 < t \leqq T, \end{cases}$$

легко получаем, что n-мерная функция $x(t)$, определенная равенством

$$x(t) = X(t)\left[x_0 - \varepsilon(t)\int\limits_0^t C(\tau)\,d\mu(\tau)\right], \tag{7}$$

совпадает с функцией x, определенной равенством (6) всюду на интервале $(0, T]$, и кроме того $x(0) = x_0$. Это дает нам основание называть функцию x в (7) обобщеным решением системы (1), удовлетворяющим начальному условию (2).

Мы ставим перед собой задачу найти обобщенное управление μ таким образом, чтобы траектория x в (7) „перенесла" данный объект от точки x_0 до другой точки, например до начала, т. е. чтобы имели место равенства $x(0) = x_0$ и $x(T) = 0$. Кроме того управление μ должно быть таким, чтобы заданная неотрицательная функция управления I, измеряющая затраченную на перенесения объекта энергию, имела возможно наименьшее значение. Обыкновенно предполагают, что функция I (её называют интенсивностью) имеет свойства нормы, т. е.

1. $I(\mu) \geqq 0$ и от $I(\mu) = 0$ следует, что $\mu = 0$;
2. $I(p\mu) = |p| I(\mu)$;
3. $I(\mu_1 + \mu_2) \leqq I(\mu_1) + I(\mu_2)$.

Решение задачи. Мы решим нашу задачу как следствие одной общей теоремы. Сформулируем без доказательства эту теорему, уточняющую L-проблему А. Маркова.

Теорема 1 [14, теорема 4]. Пусть E — нормированное действительное или комплексное пространство и пусть E_s — s-мерное пространство E. Тогда для любого функционала $l \in E_s^*$, $l \neq 0$, существуют такие неразложимые функционалы λ_k ($k = 1, \ldots, r$) единичного шара K^* пространства E^* и положительные числа $\mu_1, \ldots, \mu_r$ (здесь $1 \leqq r \leqq s$, если E

— действительное пространство и $1 \leqq r \leqq 2s-1$, если E — комплексное пространство), что выполняются следующие условия.

1. *Для любого* $x \in E_s$ имеет место представление

$$(8)\qquad l(x) = \mu_1\lambda_1(x) + \cdots + \mu_r\lambda_r(x) \quad (\mu_k > 0,\ k = 1, \ldots, r,\ \sum_{k=1}^{r} \mu_k = ||l||).$$

2. Если $x_1, \ldots, x_s$ — базис E_s, то в действительном случае матрица $\Big(\lambda_k(x_l)\Big)_{k=1}^{r}{}_{,\ l=1}^{s}$ имеет ранг r $(1 \leqq r \leqq s)$. Если E — комплексное пространство, то матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^R(x_1) & \lambda_2^R(x_1) & \ldots & \lambda_r^R(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^R(x_s) & \lambda_2^R(x_s) & \ldots & \lambda_r^R(x_s) \\ \lambda_1^R(ix_1) & \lambda_2^R(ix_1) & \ldots & \lambda_r^R(ix_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^R(ix_s) & \lambda_2^R(ix_s) & \ldots & \lambda_r^R(ix_s) \end{pmatrix}$$

имеет ранг r $(1 \leqq r \leqq 2s-1)$. Здесь λ^R — действительная часть функционала λ, а i — мнимая единица.

3. *Если* $x' \in E_s$, $x' \neq 0$ — *экстремальный элемент для функционала* l, т. е. $l(x') = ||x'||\cdot||l||$,*) то $\lambda_k(x') = ||x'||$ $(k = 1, \ldots, r)$.

Здесь введем некоторые обозначения и предположения, которыми будем пользоватся в следующем изложении.

Обозначим через $\mathbb{R}^m$ действительное нормированное пространство всех действительных m-мерных векторов с нормой $||.||_{\mathbb{R}^m}$. Аналогично, через $\mathbb{C}^m$ обозначим комплексное нормированное пространство всех m-мерных комплексных векторов с нормой $||.||_{\mathbb{C}^m}$. Через $C([0,T])$ будем обозначать как действительное пространство всех действительных непрерывных m-мерных функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}^m$, так и комплексное пространство всех комплексных непрерывных m-мерных функций $x : [0,T] \to \mathbb{C}^m$, нормированное при помощи равномерной нормы

$$(9)\qquad ||x||_C = \begin{cases} \sup\limits_{t\in T} ||x(t)||_{\mathbb{R}^m} & \text{в действительном случае,} \\ \sup\limits_{t\in T} ||x(t)||_{\mathbb{C}^m} & \text{в комплексном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через E то же самое пространство в случае, когда оно нормированно через норму, отличную от равномерной нормы. Такое объединение действительного и комплексного случая мотивируется тем, что впредь мы будем рассматривать эти два случая вместе.

Чтобы решить нашу задачу, мы должны показать существование такого обобщенного управления $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, для которого обобщенное

*) *Существование экстремального элемента для l следует из-за конечномерности пространства E_s.*

решение (7) принимало значения $x(0) = x_0$ и $x(T) = 0$. Первое равенство обеспечивается выбором функции $\varepsilon(t)$. Чтобы обеспечить второе равенство, мы должны подобрать μ таким образом, чтобы имело место равенство

$$(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) = x_0 = \int_0^T C(t)\, d\mu(t) = \left(\int_0^T C_1(t)\, d\mu(t), \ldots, \int_0^T C_n(t)\, d\mu(t) \right),$$

или

$$\int_0^T C_i(\tau)\, d\mu(\tau) = x_{0i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

Здесь непрерывные m-мерные (действительные или комплексные) функции $c_i(\tau)$ $(i \doteq 1, \ldots, n)$, как видно от (5), являются строками матрицы $C(\tau)$. Нетрудно сообразить, что выбранное таким образом обобщенное управление μ задает адитивный гомогенный функционал λ на пространстве непрерывных m-мерных функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ $(x : [0,T] \to \mathbb{C}^m)$ вида

$$\lambda(x) = \int_0^T x(t)\, d\mu(t), \tag{11}$$

удовлетворяющий равенствам (10). Мы хотим определить обобщенное управление еще так, чтобы оно переводило заданного объекта с точки $x(0) = x_0$ в точку $x(T) = 0$ с наименьшим затратом энергии, т. е. определить функционал λ (мера μ), заданный через (11) так, чтобы интесивность имела наименьшее значение. Для этой цели предположим (как это общепринято), что в пространстве m-мерных непрерывных функций, определенных на $[0,T]$ (действительных или комплексных) можно ввести норму $||\cdot||$ таким образом, что нормы функционалов λ сопряженного пространства были значениями интенсивности, т. е.

$$I(\lambda) = ||\lambda||$$

для всех λ сопряженного пространства. Как и выше, обозначим через E это нормированное пространство. Предположим еще, что оно удовлетворяет следующему условию.

Будем предполагать, что норма пространства $C([0, T])$ мажорирует норму пространства E. Это означает, что существует такая константа K, что неравенство

$$||x|| \leqq K||x||_C \tag{12}$$

выполняется для всех $x \in E$. Неравенство (12) обеспечивает существование меры μ для каждого функционала $\lambda \in E^*$ так, чтобы имело место интегральное представление (11). Действительно, от (12) следует, что любой функционал $\lambda \in E^*$ принадлежит и пространству $C^*([0, T])$, следовательно, согласно теореме Ф. Риса имеет интегральное представление

(11). При этих условиях и обозначениях нашу задачу можно сформулировать следующим образом.

Найти обобщенное управление μ таким образом, что определенный через (11) функционал $\lambda \in E^*$ удовлетворял равенствам (10) и имел наименьшую норму.

Чтобы решить эту задачу, рассмотрим подпространство E_s пространства E (E_s нормированно через норму в E), состоящееся из всех линейных комбинаций (с вещественными или комплексными коэффициентами в зависимости от того, является ли E действительным или комплексным пространством) функций $C_1, \ldots, C_n$, заданных через (5). Пусть s ($s \leqq n$) — максимальное число линейно независимых из них. Не ограничая общности, можно предположить, что первые s из этих функций $c_1, \ldots, c_s$ образуют базис E_s.

Пусть $l \in E_s^*$ — функционал, для которого имеем

$$(l(c_1), \ldots, l(c_n)) = (x_{01}, \ldots, x_{0n}) = x_0. \tag{13}$$

Если $s = n$, такой функционал наверное существует, а если $s < n$, для существования функционала необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$x_{0,s+k} = \alpha_{1k}x_{01} + \cdots + \alpha_{sk}x_{ks} \quad (k = 1, \ldots, n-s), \tag{14}$$

где константы $\alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{sk}$ определяются линейными зависимостями

$$c_{s+k}(t) \equiv \alpha_{1k}c_{1k}(t) + \cdots + \alpha_{sk}c_{sk}(t) \quad (k = 1, \ldots, n-s; \quad t \in [0,1]). \tag{15}$$

Функционал l, определенный через (13), отличен от нуля, так как x_0 — ненулевой вектор. Тогда для него будут выполняться утверждения теоремы 1. В частности l удовлетворяет представлению (8). Продолжим l посредством этого представления до функционала λ_0, определенного на E, полагая для любого $x \in E$

$$\lambda_0(x) = \mu_1\lambda_1(x) + \cdots + \mu_r\lambda_r(x) \quad \left(\mu_k > 0,\ k = 1, \ldots, r,\ \sum_{k=1}^{r} \mu_k = ||l||\right), \tag{16}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — неразложимые векторы единичного шара K^* пространства E^*. Очевидно λ_0 удовлетворяет равенству

$$(\lambda_0(c_1), \ldots, \lambda_0(c_n)) = x_0. \tag{17}$$

Так как λ_0 продолжает l, то $||\lambda_0|| \geqq ||l||$. С другой стороны, имея ввиду (16), получим для $||\lambda_0||$

$$||\lambda_0|| \leqq \mu_1||L_1|| + \cdots + \mu_r||\lambda_r|| = \sum_{k=1}^{r} \mu_k = ||l||.$$

Отсюда видно, что $||\lambda_0|| = ||l||$. От определения λ_0 ясно, что среди всех функционалов $\lambda \in E^*$, удовлетворяющих (17), λ_0 имеет наименьшую норму. От представления (16) и равенства (17) получим равенства

$$x_0 = (\lambda_0(c_1), \ldots, \lambda_0(c_n)) = \mu_1(\lambda_1(c_1), \ldots, \lambda_1(c_n)) + \cdots + \mu_r(\lambda_r(c_1), \ldots, \lambda_r(c_n)). \tag{18}$$

Но согласно (11)

$$(19)\quad (\lambda_k(c_1), \ldots, \lambda_k(c_n)) = \left(\int\limits_0^T c_1(t) d\nu_k(t), \ldots, \int\limits_0^T c_n(t) d\nu_k(t)\right) = \int\limits_0^T C(t) d\nu_k(t),$$

откуда получаем для (18)

$$(20)\qquad x_0 = \mu_1 \int\limits_0^T C(t)\, d\nu_1(t) + \cdots + \mu_r \int\limits_0^T C(t)\, d\nu_r(t).$$

Здесь $\nu_k = (\nu_{k1}, \ldots, \nu_{km})$, $k = 1, \ldots, r$ — действительные или комплексные m-мерные меры (вместе с E). Равенства (18) и (19) задают следующее обобщенное решение системы (1):

$$x(t) = X(t) \left[x_0 - \varepsilon(t) \left(\mu_1 \int\limits_0^t C(\tau)\, d\nu_1(\tau) + \cdots + \mu_r \int\limits_0^t C(\tau)\, d\nu_r(t)\right)\right],$$

а от (20) сразу вытекает, что это решение удовлетворяет равенству $x(T) = 0$.

С изложенными выше рассуждениями мы установили в качестве следствия теоремы 1 следующую теорему.

Теорема 2. При введенных выше обозначениях и предположениях, если $s = n$, то существуют функционалы $\lambda \in E^*$, удовлетворяющие равенству

$$(21)\qquad (\lambda(c_1), \ldots, \lambda(c_n)) = x_0.$$

Если $s < n$, чтобы существовали такие функционалы, необходимо и достаточно выполнение (14), при чем константы $\alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{sk}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-s)$ определяются зависимостями (15). Среди функционалов λ, удовлетворяющих (21), имеется хотя бы один — λ_0, для которого $||\lambda_0|| = I(\lambda_0) = \min$. Он удовлетворяет еще следующим условиям.

1. Для любого $x \in E$ имеет место представление

$$(22)\qquad \lambda_0(x) = \mu_1 \int\limits_0^T x(t)\, d\nu_1(t) + \cdots + \mu_r \int\limits_0^T x(t)\, d\nu_r(t).$$

Здесь $\int\limits_0^T x(t)\, d\nu_k(t)$ $(k = 1, \ldots, r)$ — неразложимые элементы единичного шара пространства E^*, $\mu_k > 0$, $\sum\limits_{k=1}^r \mu_k = ||\lambda_0||$, $\nu_1, \ldots, \nu_r$ — действительные m-мерные меры, а $1 \leqq r \leqq s$, если E — действительное пространство и $\nu_1, \ldots, \nu_r$ — комплексные m-мерные меры, а $1 \leqq r \leqq 2s-1$, если E — комплексное пространство. Система уравнений (1) имеет обобщенное решение вида

$$x(t) = X(t) \left[x_0 - \varepsilon(t) \left(\mu_1 \int\limits_0^t C(\tau)\, d\nu_1(\tau) + \cdots + \mu_r \int\limits_0^t C(\tau)\, d\nu_r(\tau)\right)\right],$$

для которого $x(0) = x_0$ и $x(T) = 0$.

2. Если система (1) — действительная вместе с E, то матрица $\left(\int\limits_0^T c_l(t)d\nu_k(t)\right)_{l=1,\ k=1}^{s\quad r}$ имеет ранг r ($1 \leqq r \leqq s$), а если (1) — комплексная система вместе с E, то матрица

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\int\limits_0^T c_1(t)\,d\nu_1(t) & \mathrm{Re}\int\limits_0^T c_1(t)\,d\nu_2(t) & \ldots & \mathrm{Re}\int\limits_0^T c_1(t)\,d\nu_r(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{Re}\int\limits_0^T c_s(t)\,d\nu_1(t) & \mathrm{Re}\int\limits_0^T c_s(t)\,d\nu_2(t) & \ldots & \mathrm{Re}\int\limits_0^T c_s(t)\,d\nu_r(t) \\ \mathrm{Re}\int\limits_0^T ic_1(t)\,d\nu_1(t) & \mathrm{Re}\int\limits_0^T ic_1(t)\,d\nu_2(t) & \ldots & \mathrm{Re}\int\limits_0^T ic_1(t)\,d\nu_r(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{Re}\int\limits_0^T ic_s(t)\,d\nu_1(t) & \mathrm{Re}\int\limits_0^T ic_s(t)\,d\nu_2(t) & \ldots & \mathrm{Re}\int\limits_0^T ic_s(t)\,d\nu_r(t) \end{pmatrix}$$

имеет ранг r ($1 \leqq r \leqq 2s-1$).

3. Если $c' = a'_1c_1 + \cdots + a'_nc_n = b'_1c_1 + \cdots + b'_sc_s$ — экстремальный элемент для λ_0, т. е. $\lambda_0(c') = ||\lambda_0||\ ||c'||$ (такой элемент существует), то

$$\int\limits_0^T c'(t)\,d\nu_k(t) = ||c'|| \quad (k = 1,\ \ldots,\ r).$$

Замечание. От точки 3 теоремы 2 сразу следует, что функционал удовлетворяет принцип максимума. Действительно, если c' — экстремальная функция для λ_0 (или т. наз. минимальная функция), то для всякого функционала $\lambda \in E^*$, для которого $||\lambda|| = ||\lambda_0||$, имеем

$$|\lambda(c')| \leqq ||\lambda||\ ||c'|| = ||\lambda_0||\ ||c'|| = \lambda_0(c'),$$

т. е.

$$\lambda_0(c') = \sup_{||\lambda|| = ||\lambda_0||} |\lambda(c')|.$$

Последнее соотношение выполняется как в действительном, так и в комплексном случае.

Утверждения теоремы 2 можно уточнить, если нам известны неразложимые элементы единичного шара пространства E^*. В следующим изложении рассмотрим два примера, в которых дается описание этих неразложимых элементов.

Пример 1. Рассмотрим случай, когда норма пространства E совпадает с $||\cdot||_C$, т. е. когда $E = C([0,T])$. В этом случае неразложимые элементы единичного шара $C^*([0,T])$ имеют вид

$$\lambda(x) = \Lambda(x(t')),$$

где Λ — неразложимый функционал единичного шара пространства $\mathbb{R}^{m^*}$ (или $\mathbb{C}^{m^*}$), а t' — фиксированное число сегмента $[0, T]$ (см. [15, стр. 166–170] и [14, теорему 1]). Но тогда представление (22) функционала λ_0 имеет вид

$$\lambda_0(x) = \mu_1 \Lambda_1(x(t_1)) + \cdots + \mu_r \Lambda_r(x(t_r)). \tag{24}$$

Имея ввиду факт, что функционалы Λ_k ($k = 1, \ldots, r$) и значения $x(t)$ функций пространства $C([0,\ T])$ суть m-мерные векторы, положив в (24) последовательно $x = c_1$, $x = c_2$, …, $x = c_n$ и применяя равенство (17), заключаем, что

$$x_0 = \mu_1 C(t_1)\Lambda_1 + \cdots + \mu_r C(t_r)\Lambda_r. \tag{25}$$

От (25) получаем обобщенное решение системы (1)

$$x(t) = X(t)\left[x_0 - \varepsilon(t)\left(\sum_{k:t_k \leqq t} \mu_k C(t_k)\Lambda_k\right)\right],$$

где мера, сосредоточивающая массы μ_k в точках t_k ($k = 1, \ldots, r$), задает импульсное решение системы (1). Очевидно при том, что $x(0) = x_0$ и $x(T) = 0$.

Чтобы получить в этом частном случае соответствующую теорему, достаточно сделать некоторые очевидные изменения теоремы 2, но мы не будем заниматься этим. Отметим только, что рассмотренный пример обобщает и уточняет один результат Н. Красовского (см. [13, теорему 23.1, стр. 188]), а так же один пример в [10, стр. 513–515].

Пример 2. Рассмотрим теперь случай, когда норма в E задается равенством

$$||x|| = \int_0^T \left(\sum_{l=1}^m |x_l(t)|\right) dt.$$

Так как норма пространства E удовлетворяет неравенству (12), то обобщенные управления μ заданы на всем пространстве E^*, а значения интенсивности являются нормами функционалов $\lambda \in E^*$. По существу известно, что пространство E изоморфно относительно линейных действий, а так же изометрично пространству, которое построим сейчас. Для этой цели перенесем $m - 1$ раз сегмент $[0,\ T]$ по числовой оси так, что полученние m сегментов не имели общих точек. Обозначим через $E(T)$ объединение этих сегментов. Пусть например

$$E(T) = \bigcup_{l=1}^m [\beta_l,\ \beta_l + T],$$

где $\beta_1 = 0$ и $\beta_{l+1} - \beta_l > T$, $l = 1, \ldots, l-1$ (см. [10, гл. VIII, § 9, п. 6, стр. 436–437]). Определим на $E(T)$ функции v, положив

$$v(t) = x_l(t - \beta_l) \quad \text{для} \quad t \in [\beta_l,\ \beta_l + T] \quad (l = 1, \ldots, m).$$

Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между функциями $x \in E$ и функциями v. Это соответствие является изоморфизмом относительно линейных действий. Добавим, что каждая непрерывная числовая функция на $E(T)$ есть образ некоторой функции $x \in E$. Введя в пространство функций v норму

$$||v|| = \int\limits_{E(T)} |v(t)|\, dt \tag{26}$$

и обозначив через $L_1(E(T))$ соответствующее нормированное пространство, получим равенства

$$||v|| = \int\limits_{E(T)} |v(t)|dt = \int\limits_0^T |x_1(t)|dt + \int\limits_{\beta_2}^{\beta_2+T} |x_2(t-\beta_2)|dt + \cdots + \int\limits_{\beta_m}^{\beta_m+T} |x_m(t-\beta_m)|dt$$

$$= \int\limits_0^T \left(\sum_{l=1}^m |x_l(t)|\right) dt = ||x||.$$

И так, установленное соответствие между функциями пространства $L_1(E(T))$ и E является так же изометрией. Это обстоятельство дает нам возможность утверждать, что сопряженные пространства $L_1^*(E(T))$ и E^* совпадают. Очевидно, что их единичные шары, как и неразложимые элементы этих шаров тоже совпадают. Но неразложимые элементы единичного шара $L_1(E(T))$ известны (см. [15, лемму 1.13, стр. 83–84]). Они имеют представление вида

$$\lambda(x) = \lambda(v) = \int\limits_{E(T)} v(t)\alpha(t)\, dt,$$

где α — суммируемая функция на $E(T)$ (действительная или комплексная вместе с E и системой (1)), соответствующая функционалу λ и удовлетворяющая условию

$$|\alpha(t)| = 1 \quad \text{почти всюду на} \quad E(T),$$

а $||\lambda|| = \sup\text{ess}|\alpha(t)| = 1$. Тогда для любой функции $v \in L_1(E(T))$ имеем

$$\int\limits_{E(T)} v(t)\alpha(t)dt = \int\limits_0^T x_1(t)\alpha(t)dt + \int\limits_{\beta_2}^{\beta_2+T} x_2(t-\beta_2)\alpha(t)dt + \cdots + \int\limits_{\beta_m}^{\beta_m+T} x_m(t-\beta_m)\alpha(t)dt$$

$$= \int\limits_0^T \left(\sum_{l=1}^m x_l(t)\alpha_l(t)\right) dt,$$

где $\alpha_l(t) = \alpha(t+\beta_l)$ для $t \in [0, T]$, $l = 1, \ldots, m$. Обозначим опять через α m-мерную векторную функцию $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и положим

$$\sum_{l=1}^m x_l(t)\alpha_l(t) = x(t)\alpha(t).$$

Тогда для функционала λ ($||\lambda|| = 1$) получим

$$\lambda(x) = \int_0^T x(t)\alpha(t)\,dt.$$

Здесь $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — суммируемые функции на сегменте $[0, T]$ и кроме того

$$|\alpha_l(t)| = 1 \quad \text{почти всюду на} \quad [0, T] \quad (l = 1, \ldots, m).$$

Имея ввиду представление неразложимых функционалов единичного шара пространства $L_1^*(E(T)) = E^*$, легко получаем для представления (22) функционала λ_0 выражение

$$\lambda_0(x) = \mu_1 \int_0^T x(t)\alpha^1(t)\,dt + \cdots + \mu_r \int_0^T x(t)\alpha^r(t)\,dt,$$

где $\alpha^k = (\alpha_1^k, \ldots, \alpha_m^k)$ ($k = 1, \ldots, m$) — векторные функции на сегменте $[0, T]$, компоненты которых являются суммируемыми функциями на этом сегменте и удовлетворяют условию

$$|\alpha_l^k(t) = 1 \quad \text{почти всюду на} \quad [0, T] \quad (k = 1, \ldots, r; \quad l = 1, \ldots, m).$$

Кроме того α_l^k — действительные или комплексные функции вместе с E. Отсюда получим для системы (1) обобщенное решение

$$x(t) = X(t) \left[x_0 - \mu_1 \int_0^t C(\tau)\alpha^1(\tau)\,d\tau - \cdots - \mu_r \int_0^t C(\tau)\alpha^r(\tau)\,d\tau \right].$$

Так как мера Лебега сосредоточивает массу 0 в точку $t = 0$ (как и во всех остальных точек сегмента $[O, T]$), то умножение интегралов на $\varepsilon(t)$ является излишным. Очевидно, что имеют место равенства $x(0) = x_0$, $x(T) = 0$. И здесь мы ограничимся со сделанными выше заметками и не будем форморулировать соответное уточнение теоремы 2.

Мы могли бы увеличить число примеров, но как нам кажется, приведенные примеры достаточно хорошо иллюстрируют пользу от привлечения понятия неразложимости в этих вопросах.

Мой коллега проф. Н. Хаджииванов просмотрел всю рукопись и сделал ряд полезных замечаний. Считаю своим приятным долгом выразить ему свою сердечную благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Markoff, A. Nouvelles applications des fraction continues. — Math. Ann., **47**, 1896, 579–597.
2. Марков, А. О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием. — Зап. Акад. наук., сер. VIII, VI, **5**, 1898.
3. Марков, А. Избранные труды. Москва — Ленинград, 1948.

4. Achieser, N., M. Krein. Über Fouriersche Reihen beschränkter Funktionen und ein neues Extremumproblem I. — Сообщения Харьк. мат. общества и научно-изсл. и-тута мат. и мех. при Харьк. гос. ун-те, **4**, IX, 1934, 9–23.
5. Achieser, N., M. Krein. Über Fouriersche Reihen beschränkter Funktionen und ein neues Extremumproblem II. — Сообщения Харьк. мат. общества и научно-изсл. и-тута мат. и мех. при Харьк. гос. ун-те, **4**, X, 1934, 3–32.
6. Ахиезер, Н., М. Крейн. Проблема моментів на двох інтервалах при додатковій умов А. А. Маркова. — Записки науково дослідного ін-ту мат. и мех. Харьківского мат. товариства, XIV, **4**, 1937, 47–59.
7. Ахиезер, Н., М. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. ГОНТИ, Харьков, 1938.
8. Крейн, М. Об одном обобщении исследований акад. Маркова о предельных величинах интегралов. — Труды II всесоюзного мат. съезда, II, 1934, 152–154.
9. Крейн, М. Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие. — Успехи мат. наук, VI, **4**, 1951, 3–120.
10. Крейн, М., А. Нудельман. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973.
11. Красовский, Н. К теории оптимального регулирования. — Автоматика и телемеханика, **18**, **11**, 1957, 960–970.
12. Красовский, Н. Об одной задаче оптимального регулирования. — Прикладная математика и механика, **21**, **5**, 1957, 670–677.
13. Красовский, Н. Теория управлениия движением. М., 1968.
14. Чакалов, В. Экстремальные элементы нормированных пространств и некоторые связанные с ними экстремальные задачи I. — Сердика, **12**, 1986, 250–264.
15. Singer, I. Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. Berlin, 1970.

Постъпила на 08.04.1994