ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 87, 1993

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 87, 1993

REPRESENTATION PAR DIFFERENCES DIVISEES DES MOMENTS RECIPROQUES DE COMBINAISONS LINEAIRES DE VARIABLES ALEATOIRES INDEPENDANTES EXPONENTIELLEMENT REPARTIES

MODY DIALLO, TZVETAN IGNATOV

Моди Диало, Цветан Игнатов. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЦИПРОЧНЫХ МОМЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ НЕЗАВИСИМЫХ ЕКСПОНЕНЦИАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ЧЕРЕЗ РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ

Для реципрочных моментов линейных комбинациях составленны независимых експоненциально распределенных случайних величин найдено представление (формула (3)) посредством разделенных разностей подходящей функции.

Mody Diallo, Tzvetan Ignatov. REPRESENTATION OF THE RECIPROCAL MOMENTS OF LINEAR COMBINATIONS OF INDEPENDENT EXPONENTIAL VARIATES

For the reciprocal moments of linear combinations of independent exponential variates is given the representation (formula (3)) through divided differences of a suitable function.

1. INTRODUCTION

Dans beaucoup de problèmes de statistique surgit la nécessité de la détermination des moments réciproques de la variable aléatoire

$$\eta_n = \frac{1}{\lambda_1}\xi_1 + \frac{1}{\lambda_2}\xi_2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}\xi_n, \tag{1}$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont des variables aléatoires indépendantes exponentiellement réparties de moyenne unité. Comme exemple, nous pouvons donner les résultats de Cox et Lewis (1966) relatifs à l'intensité moyenne du flux des naissances dans le processus des naissances. Plus précisément,

$$E\left(\frac{n-m}{\eta_n-\eta_m}\right)=(n-m)E\left(\frac{1}{\frac{1}{\lambda_{m+1}}\xi_{m+1}+\cdots+\frac{1}{\lambda_n}\xi_n}\right),$$

qui se réduit jusqu'à l'obtention du premier moment réciproque $E\left(\frac{1}{\eta_n}\right)$. On peut voir d'autres exemples dans l'article de Thomas (1976). Dans le même article est donnée l'expression du moment réciproque d'ordre r de η_n, mais dans laquelle figurent des grandeurs qui ne s'expriment pas explicitement. Cependant, il faut les chercher à partir de la décomposition en fractions élémentaires de la fonction caractéristique de η_n.

Le but principal du présent travail est la présentation des moments réciproques de η_n par différences divisées de fonctions convenables.

2. REPRESENTATION DES MOMENTS RECIPROQUES DE η_n PAR DIFFERENCES DIVISEES

Rappelons (cf. [4], p. 47) que les différences divisées d'ordre n de la fonction $\varphi(u)$ suffisamment lisse sur les points (nœuds) de la droite réelle $\ldots \leqq t_i \leqq t_{i+1} \leqq \cdots \leqq t_{i+n} \leqq \ldots$ doivent être définies comme il suit:

$$[t_i,\ldots,t_{i+n}]_u\varphi(u)=\frac{[t_{i+1},\ldots,t_{i+n}]_u\varphi(u)-[t_i,\ldots,t_{i+n-1}]_u\varphi(u)}{t_{i+n}-t_i} \tag{2}$$

avec la supposition que $t_i \neq t_{i+n}$. Si $t_i=t_{i+1}=\cdots=t_{i+n}$ alors

$$[t_i,\ldots,t_{i+n}]_u\varphi(u)=\frac{(D^n\varphi(t_i))}{n!},$$

où avec $D^n\varphi(t_i)$ est désignée la n^e dérivée de la fonction $\varphi(u)$ au point t_i, $n \geqq 0$, et $D^0\varphi(t_i)$ est désignée par $\varphi(t_i)$.

A l'aide des différences divisées nous pouvons représenter les moments réciproques de η_n par le théorème suivant:

Théorème. *Soit un nombre naturel r, $r<n$, et $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ des nombres réels positifs. Alors il existe le moment réciproque $E\left(\frac{1}{\eta_n^r}\right)$ d'ordre r, qui est égal à*

$$E\left(\frac{1}{\eta_n^r}\right)=(-1)^{n-r+1}\frac{1}{(r-1)!}\lambda_1\ldots\lambda_n([\lambda_1,\ldots,\lambda_n]_\lambda\lambda^{r-1}\ln\lambda). \tag{3}$$

Démonstration. Dans l'article de Ignatov et Stateva (1989) (formule 9) la densité de η_n est représentée à l'aide des différences divisées par

$$f_{\eta_n}(x)=(-1)^{n-1}\operatorname{sgn}(x)\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]_\lambda(\operatorname{sgn}(\lambda x))_+\exp(-\lambda x), \tag{4}$$

où $(u)_+ = \max(0, u)$ et $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Utilisant la formule (4), pour le moment réciproque d'ordre r de η_n nous avons

$$
(5) \qquad E\left(\frac{1}{\eta_n^r}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{x^r}(-1)^{n-1}\lambda_1 \dots \lambda_n [\lambda_1, \dots, \lambda_n]_\lambda e^{-\lambda x} dx
$$

$$
= (-1)^{n-1}\lambda_1 \dots \lambda_n \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty [\lambda_1, \dots, \lambda_n]_\lambda \frac{e^{-\lambda x}}{x^r}\, dx
$$

$$
= (-1)^{n-1}\lambda_1 \dots \lambda_n \lim_{\varepsilon \to 0} [\lambda_1, \dots, \lambda_n]_\lambda \left\{ -\sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)\dots(r-k)x^{r-k}} \Bigg|_\varepsilon^{+\infty} \right.
$$

$$
\left. + (-\lambda)^{r-1} \frac{1}{(r-1)!} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{x}\, dx \right\}
$$

$$
= (-1)^{n-1}\lambda_1 \dots \lambda_n \lim_{\varepsilon \to 0} [\lambda_1, \dots, \lambda_n]_\lambda \left\{ \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-\lambda)^{k-1} e^{-\lambda \varepsilon}}{(r-1)\dots(r-k)\varepsilon^{r-k}} \right.
$$

$$
\left. + (-\lambda)^{r-1} \frac{1}{(r-1)!} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{x}\, dx \right\}.
$$

En considérant que $1 \leqq k \leqq r - 1 \leqq n - 1$, on a

$$
(6) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{r-k}} [\lambda_1, \dots, \lambda_n]_\lambda \lambda^{k-1} e^{-\lambda \varepsilon} = 0.
$$

En effet, de la formule de Leibnitz (voir Schumaker (1981), p. 50, formule (2.96))

$$
[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+n}]_u f(u) g(u)
$$

$$
= \sum_{j=0}^{n} \big([t_i, \dots, t_{i+j}]_u f(u)\big).\big([t_{i+j}, t_{i+j+1}, \dots, t_{i+n}]_u g(u)\big)
$$

nous avons

$$
(7) \qquad [\lambda_1, \dots, \lambda_n]_\lambda \lambda^{k-1} e^{-\lambda \varepsilon}
$$

$$
= \sum_{j=1}^{n} \big([\lambda_1, \dots, \lambda_j]_\lambda \lambda^{k-1}\big).\big([\lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n]_\lambda e^{-\lambda \varepsilon}\big)
$$

$$
= \sum_{j=1}^{k} \big([\lambda_1, \dots, \lambda_j]_\lambda \lambda^{k-1}\big).\big([\lambda_j, \dots, \lambda_n]_\lambda e^{-\lambda \varepsilon}\big).
$$

Du développement

$$
e^{-\lambda \varepsilon} = 1 - \frac{\lambda \varepsilon}{1!} + \frac{(\lambda \varepsilon)^2}{2!} - \dots + (-1)^{n-j} \frac{(\lambda \varepsilon)^{n-j}}{(n-j)!} + \varepsilon^{n-j+1}.\psi(\lambda, \varepsilon, n-j)
$$

et de la formule (7) nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{r-k}}[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]_\lambda\lambda^{k-1}e^{-\lambda\varepsilon}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}([\lambda_1,\ldots,\lambda_j]_\lambda\lambda^{k-1})\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{r-k}}[\lambda_j,\ldots,\lambda_n]_\lambda\biggl(1-\frac{\lambda\varepsilon}{1!}+\frac{(\lambda\varepsilon)^2}{2!}-\cdots$$

$$+(-1)^{n-j}\frac{(\lambda\varepsilon)^{n-j}}{(n-j)!}+\varepsilon^{n-j+1}\psi(\lambda,\varepsilon,n-j)\biggr)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}([\lambda_1,\ldots,\lambda_j]_\lambda\lambda^{k-1})\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{n-j+1}}{\varepsilon^{r-k}}[\lambda_j,\ldots,\lambda_n]_\lambda\psi(\lambda,\varepsilon,n-j)\right)=0.$$

Il s'en suit la relation (6).

De (5) et (6) nous avons

$$(8)\quad E\left(\frac{1}{\eta_n^r}\right)=(-1)^{n-1}\lambda_1\ldots\lambda_n\lim_{\varepsilon\to 0}[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]_\lambda\left((-\lambda)^{r-1}\frac{1}{(r-1)!}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{x}\,dx\right).$$

On sait que (cf. [1])

$$\int_0^\infty(\ln x)\lambda e^{-\lambda x}\,dx=-c-\ln\lambda,$$

où c est la constante d'Euler; donc

$$(9)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty(\ln x)\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-e^{-\lambda x}\ln x\Big|_\varepsilon^{+\infty}+\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{x}\,dx\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(e^{-\lambda\varepsilon}\ln\varepsilon+\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{x}\,dx\right)=-c-\ln\lambda.$$

De (9) nous pouvons écrire pour $\lambda>0$

$$(10)\qquad \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{x}\,dx=-c-\ln\lambda-e^{-\lambda\varepsilon}\ln\varepsilon+o(\varepsilon,\lambda),$$

où $\lim_{\varepsilon\to 0}o(\varepsilon,\lambda)=0$.

De (8) et (10) nous obtenons

$$(11)\qquad E\left(\frac{1}{\eta_n^r}\right)$$

$$=(-1)^{n-1}\lambda_1\ldots\lambda_n(-1)^{r-1}\frac{1}{(r-1)!}\lim_{\varepsilon\to 0}[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]_\lambda\lambda^{r-1}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{x}\,dx$$

$$= (-1)^{n-r}\lambda_1\ldots\lambda_n\frac{1}{(r-1)!}\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]_\lambda(-c\lambda^{r-1})$$
$$-\lim_{\varepsilon\to 0}(\ln\varepsilon)[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]_\lambda(\lambda^{r-1}e^{-\lambda\varepsilon})+\lim_{\varepsilon\to 0}[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]_\lambda\big(\lambda^{r-1}o(\varepsilon,\lambda)\big)$$
$$-\lim_{\varepsilon\to 0}[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]_\lambda(\lambda^{r-1}\ln\lambda)\Big)$$
$$= (-1)^{n-r+1}\frac{\lambda_1\ldots\lambda_n}{(r-1)!}[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]_\lambda(\lambda^{r-1}\ln\lambda).$$

Thomas (1976) a donné d'une façon explicite le premier moment réciproque pour *la variable aléatoire* η_n *de (1) quand*

$$\lambda_1 = m-j+1,\quad \lambda_2 = m-j+2,\quad \ldots,\quad \lambda_{j-i} = m-i, \tag{12}$$

où m, i et j sont des nombres entiers fixés tels que $i<j<m$. L'expression donnée par Thomas a la forme

$$E\left(\left(\frac{1}{m-j+1}\xi_1+\cdots+\frac{1}{m-i}\xi_{j-i}\right)^{-r}\right) \tag{13}$$

$$= \frac{(-1)^{j-i+1}}{\Gamma(r)}\binom{m-i}{j-i}\sum_{k=1}^{j-i}k\binom{j-i}{k}(-1)^k(m-i-k+1)^{r-1}\ln(m-i-k+1),\ r<j-i.$$

Nous déduisons (13) comme cas particulier de (3) avec les suppositions (12). Conformement à (3) nous avons

$$E\left(\left(\frac{1}{m-j+1}\xi_1+\cdots+\frac{1}{m-i}\xi_{j-i}\right)^{-r}\right)$$
$$= \frac{(-1)^{j-i-r+1}}{(r-1)!}\left(\prod_{k=1}^{j-i}(m-i-k+1)\right)[m-j+1,\ldots,m-i]_\lambda(\lambda^{r-1}\ln\lambda)$$
$$= \frac{(-1)^{j-i-r+1}}{\Gamma(r)}\left(\prod_{k=1}^{j-i}(m-i-k+1)\right)\sum_{k=1}^{j-i}\frac{(m-i-k+1)^{r-1}\ln(m-i-k+1)}{(m-i-k+1)\prod\limits_{s=1,\,s\neq k}^{j-i}(s-k)}$$
$$= (-1)^{j-i-r+1}\frac{1}{\Gamma(r)}\frac{(m-i)!}{(m-j)!}\sum_{k=1}^{j-i}\frac{(m-i-k+1)^{r-2}\ln(m-i-k+1)}{(-1)^{k-1}(k-1)!(j-i-k)!}$$
$$= \frac{(-1)^{j-i-r+1}}{\Gamma(r)}\binom{m-i}{j-i}\sum_{k=1}^{j-i}k\frac{(j-i)!(-1)^k}{k!(j-i-k)!}(m-i-k+1)^{r-2}\ln(m-i-k+1)$$
$$= \frac{(-1)^{j-i-r+1}}{\Gamma(r)}\sum_{k=1}^{j-i}k\binom{j-i}{k}(-1)^k(m-i-k+1)^{r-2}\ln(m-i-k+1),\ r<j-i.$$

Enfin, remarquons que si entre les coefficients de la variable aléatoire η_n de (1) il y a au moins deux indices différents, alors il n'existe pas un seul moment réciproque de

η_n. Si tous les coefficients de η_n ont le même indice, alors son moment réciproque d'ordre r existe à condition que $r < n$.

En effet, si $r \geqq n$, pour $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$E(\eta_n^{-r}) \geqq \left(\max_{1 \leqq i \leqq n} \lambda_i\right) E\big((\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n)^{-r}\big).$$

Puisque $\xi_1 + \cdots + \xi_n$ est une variable aléatoire répartie suivant la loi gamma de paramètres n et 1, alors

$$E\big((\xi_1 + \cdots + \xi_n)^{-r}\big) = \int_0^\infty x^{-r} \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-x}\, dx = +\infty,$$

par conséquent le $r^{i\grave{e}me}$ moment réciproque de η_n n'existe pas. La formule (3) même "donne une indication" que le $r^{i\grave{e}me}$ moment réciproque de $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ pour $r \geqq n$ n'existe pas. En effet, pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, nous avons pour $r \geqq n$:

$$E(\eta_n^{-r}) = \varepsilon^{-r} E\left(\left(\frac{\eta_n}{\varepsilon}\right)^{-r}\right) = \varepsilon^{-r} \frac{(-1)^{n-r+1}}{(r-1)!} \varepsilon^n \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1}\lambda^{r-1} \ln \lambda \bigg|_{\lambda=\varepsilon}$$

$$= \frac{(-1)^{n-r+1}}{(r-1)!(n-1)!} (\ln \varepsilon + \cdots).$$

Le premier élément, $\ln \varepsilon$, dans la précédente somme tend vers l'infini si $\varepsilon \to 0$ et cette situation ne s'est pas produite pour $r < n$, puisque dans ce cas l'élément $\ln \varepsilon$ manquerait.

Enfin, donnons explicitement la formule pour le $r^{i\grave{e}me}$ moment réciproque de η_n de (1). Sans restriction à la généralité nous pouvons supposer que $0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n$. Puisque quelques λ_i peuvent être égaux, soit alors

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} = \{\overbrace{\tau_1, \ldots, \tau_1}^{l_1}, \ldots, \overbrace{\tau_d, \ldots, \tau_d}^{l_d}\},$$

où $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_d$ et $l_1 + l_2 + \cdots + l_d = n$.

Les différences divisées d'une fonction $f(\lambda)$ suffisamment lisse peuvent s'exprimer par (cf. [4], p. 45)

(14)

$$[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]_\lambda f(\lambda) = [\overbrace{\tau_1, \ldots, \tau_1}^{l_1}, \ldots, \overbrace{\tau_d, \ldots, \tau_d}^{l_d}]_\lambda f(\lambda) = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_d \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_d \end{bmatrix}_\lambda f(\lambda)$$

$$= \frac{\det \begin{pmatrix} \overbrace{\tau_1 \quad \ldots \quad \tau_1}^{l_1} & \ldots & \overbrace{\tau_d \quad \ldots \quad \tau_d \quad \tau_d}^{l_d} \\ u_1(\lambda) \quad \ldots \quad u_{l_1}(\lambda) & \ldots & u_{l_1+\cdots+l_{d-1}+1}(\lambda) \quad \ldots \quad u_{n-1}(\lambda) \quad f(\lambda) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \overbrace{\tau_1 \quad \ldots \quad \tau_1}^{l_1} & \ldots & \overbrace{\tau_d \quad \ldots \quad \tau_d}^{l_d} \\ u_1(\lambda) \quad \ldots \quad u_{l_1}(\lambda) & \ldots & \ldots \quad \ldots \quad u_n(\lambda) \end{pmatrix}},$$

où le déterminant du dénominateur est défini par

$$(15)\quad \det\begin{pmatrix} \overbrace{\tau_1 \quad \dots \quad \tau_1}^{l_1} & \dots & \overbrace{\tau_d \quad \dots \quad \tau_d}^{l_d} \\ u_1(\lambda) \quad \dots \quad u_{l_1}(\lambda) & \dots & \dots \quad \dots \quad u_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1(\tau_1) & u_2(\tau_1) & \dots & u_n(\tau_1) \\ Du_1(\tau_1) & Du_2(\tau_1) & \dots & Du_n(\tau_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{l_1-1}u_1(\tau_1) & D^{l_1-1}u_2(\tau_1) & \dots & D^{l_1-1}u_n(\tau_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1(\tau_d) & u_2(\tau_d) & \dots & u_n(\tau_d) \\ Du_1(\tau_d) & Du_2(\tau_d) & \dots & Du_n(\tau_d) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{l_d-1}u_1(\tau_d) & D^{l_d-1}u_2(\tau_d) & \dots & D^{l_d-1}u_n(\tau_d) \end{vmatrix},$$

où les fonctions $u_i(\lambda)$ sont données par $u_i(\lambda) = \lambda^{i-1}$, $i = 1, \dots, n$, et $D^k g(\lambda)$ est la $k^{ième}$ dérivée d'une certaine fonction g au point λ $(D^0 g(\lambda) = g(\lambda))$, c'est-à-dire pour les éléments de la matrice dans (15) nous avons

$$D^k(u_i(\tau_j)) \equiv D^k(\tau_j^{i-1}) = \begin{cases} \dfrac{(i-1)!}{(i-k-1)!}\,\tau_j^{i-1-k}, & \text{si } k \leqq i-1, \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Le déterminant du dénominateur de (14) s'obtient de façon explicite par (cf. [4], p. 30)

$$\det\begin{pmatrix} \overbrace{\tau_1 \quad \tau_1 \quad \dots \quad \tau_1}^{l_1} & \dots & \overbrace{\tau_d \quad \dots \quad \tau_d}^{l_d} \\ 1 \quad \lambda \quad \dots \quad \dots & \dots & \dots \quad \dots \quad \lambda^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqq i<j \leqq d} (\tau_j - \tau_i)^{l_i l_j} \prod_{i=1}^{d} \prod_{\nu=1}^{l_i-1} \nu!.$$

Le déterminant du numérateur de (14) se calcule analogiquement en remplaçant la fonction $u_n(\lambda)$ par $f(\lambda) = \lambda^{r-1} \ln \lambda$.

Remarquons que pour trouver le déterminant du numérateur, on considère que

$$D^k(f(\tau_j)) \equiv D^k(\tau_j^{r-1} \ln \tau_j)$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1-i}k!}{(k-1)i!} \frac{(r-1)!}{(r-1-i)!}\tau_j^{r-1-k} + \ln \tau_j \frac{(r-1)!}{(r-1-k)!}\tau_j^{r-1-k}, & \text{si } k \leqq r-1, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-1)^{k-i-1}k!(r-1)!}{(k-i)i!(r-1-i)!}\,\tau_j^{r-k-1}, & \text{si } k > r-1. \end{cases}$$

LITTERATURE

1. A b r a m o v i t z, M., I. A. S t e g u n. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Dover, New York, 1964.
2. C o x, D. R., P. A. W. L e w i s. The statistical analysis of series of events. London: Methuen & Co., Ltd, 1966.
3. I g n a t o v, Tz. G., E. I. S t a t e v a. Representations of the density and the distribution function of a linear combination of exponential variates as a divided difference. In: Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of the Eighteenth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Sofia, 1989.
4. S c h u m a k e r, L. Spline functions: Basic theory. John Wiley, New York, 1981.

Reçu le 02.06.1994

Mody O. Diallo
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
de l'Université de Sofia, Bulgarie, et
Faculté des Sciences de l'Université de
Conakry, République de Guinée

Tzvetan G. Ignatov
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
de l'Université de Sofia, Bulgarie