ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 87, 1993

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 87, 1993

УСТОЙЧИВОСТ НА СТАЦИОНАРНИТЕ ДВИЖЕНИЯ НА СИСТЕМИ ОТ СИМЕТРИЧНИ ТЕЛА, СВЪРЗАНИ СЪС СФЕРИЧНИ ШАРНИРИ

НИКОЛИНА ВАСИЛЕВА

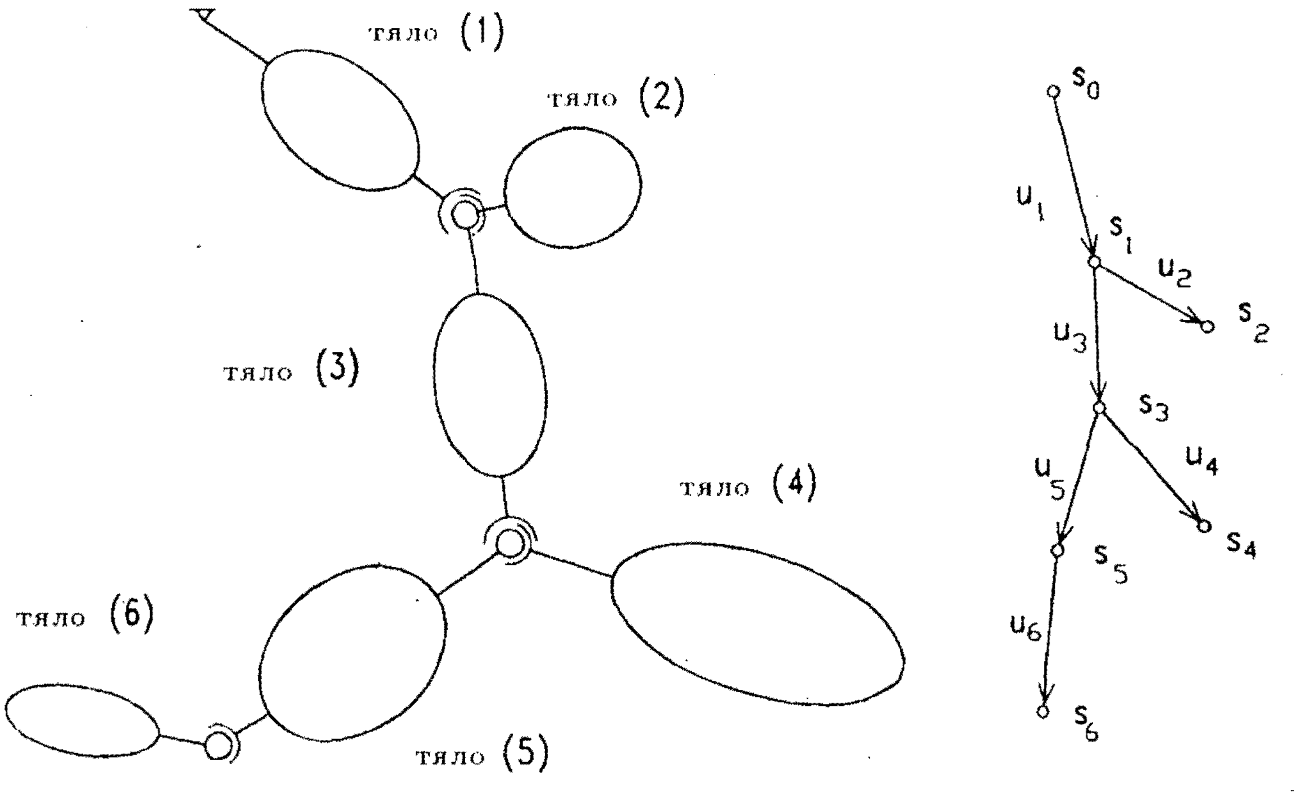
Николина Василева. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ, СВЯЗАННЫХ СФЕРИЧЕСКИМИ ШАРНИРАМИ

Работа посвящена устойчивости стационарных движений систем абсолютно твердых тел со структурой дерева. В концах динамических осей симметрии тел расположены идеальные сферические шарниры. Одно из тел имеет неподвижную точку. Стационарными являются движения, при которым оси тел вращаются как твердое тело вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скорости. Притом каждое тело системы совершает вращение вокруг своей оси симметрии. Достаточные условия выведены из теоремы Рауса об устойчивости приведенной системы.

Nikolina Vasileva. STABILITY OF STEADY-STATE MOTIONS OF SYSTEMS OF SYMMETRIC RIGID BODIES WITH BALL-AND-SOCKET JOINTS

The paper is developed to the study of stability of steady-state motions of a tree-like system. Heavy symmetric rigid bodies are connected at the ends of their symmetry axes with ball-and-socket joints. One of the bodies is fixed. The steady-state motions are obtained when the symmetry axes and rods move as one rigid body, rotating with a constant angular velocity around the vertical and at the same time the bodies rotate uniformly around their symmerty axes. The sufficient conditions for stability of steady-state motions are derived from Routh's theorem for stability of the reduced system.

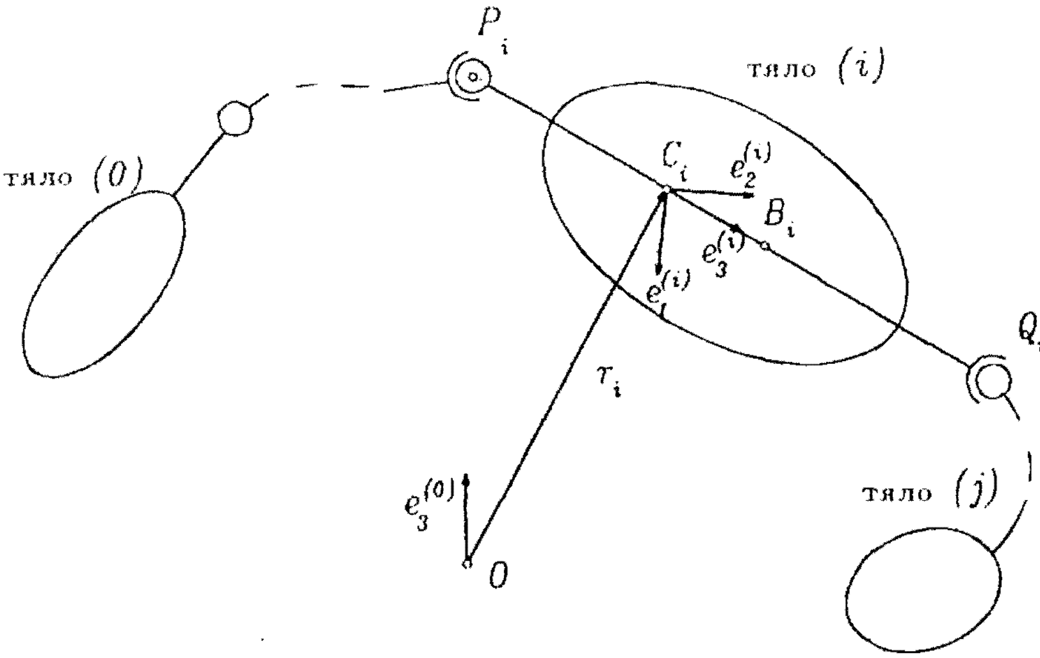
Да разгледаме система абсолютно твърди тела, за която са изпълнени следните условия: системата има структура *на дърво и се намира* под действието на силата на тежестта, тяло (0) е неподвижно, телата от системата имат динамични оси на симетрия и са свързани помежду си в краищата на осите си на симетрия с помощта на сферични шарнири. Допускаме също, че кинематичните връзки, реализирани в съчлененията между телата, са идеални, т. е. силите на реакциите не извършват работа за виртуални премествания на системата. На дадената система съпоставяме ориентиран граф, в който дъгите $u_\alpha(\alpha = 1, \ldots, n)$ съответстват на съчлененията, а върховете s_i $(i = 1, \ldots, n)$ — на телата от системата ([1]). Предполагаме, че номерацията на дъгите и върховете в графа е правилна, т. е. всеки връх и предшестващата го дъга носят един и същ номер. Предполагаме също, че дъгите са насочени от връх с по-малък номер към връх с по-голям номер (фиг. 1). Тогава матрицата на инцидентност T ([1]) има елементи T_{ij}, които приемат стойности -1 и 0, а именно $T_{ij} = -1$, ако дъгата u_i (върхът s_i) принадлежи на пътя от върха s_0 до върха s_i, и $T_{ij} = 0$ в противен случай.



Фиг. 1

Разглеждаме тяло с номер i. Тъй като пътят между върха s_i и произволен друг връх s_j от графа е единствен, то само една от шарнирните точки на тяло (i) води към тяло (j). Точката P_i, водеща към тяло (0), се нарича предшестваща точка. Към шарнирните точки P_i и Q_i, съвпадащи с центровете на сферичните шарнири на тяло (i) (фиг. 2), добавяме точкова маса, равна на сумата от масите на всички тела, към които води тази точка. Полученото тяло с маса M се нарича допълнено тяло (i), а неговият масов център B_i — барицентър на тяло (i). Тъй като телата са симетрични, масовият център C_i и барицентърът B_i на тяло (i) лежат на оста на симетрия P_iQ_i на тялото. Ако $\mathbf{e}_i$ е единичният вектор, насочен по оста на симетрия на тяло (i) в посока от шарнирна точка P_i към масовия център C_i, то

$$(1)\quad \overline{P_iC_i}=c_i\mathbf{e}_i,\ c_i \geqq 0,\ \overline{P_iQ_i}=l_i\mathbf{e}_i,\ \overline{P_iB_i}=b_i\mathbf{e}_i,\ b_i=\frac{1}{M}\left[(c_i-l_i)m_i-l_i\sum_{j=1}^{n}T_{ij}m_j\right].$$



Фиг. 2

Въвеждаме неизменно свързан с тяло (i) базис

$$\mathbf{e}^{(i)}=\left(\mathbf{e}_1^{(i)},\mathbf{e}_2^{(i)},\mathbf{e}_3^{(i)}\right)^T \qquad (i=1,\ldots,n),$$

за който координатният вектор $\mathbf{e}_3^{(i)}=\mathbf{e}_i$. Тензорът на инерцията на допълненото тяло (i) относно точката P_i може да се представи във вида $\mathbf{J}_i=J_1^{(i)}\left(\mathbf{e}_1^{(i)}\mathbf{e}_1^{(i)}+\mathbf{e}_2^{(i)}\mathbf{e}_2^{(i)}\right)+J_3^{(i)}\mathbf{e}_3^{(i)}\mathbf{e}_3^{(i)}$. Инерчните моменти $J_1^{(i)}, J_3^{(i)}$ и

$$\varepsilon_{ij}=-M(T_{ij}l_ib_j+T_{ji}l_jb_i)=\varepsilon_{ji}, i\neq j, \varepsilon_{ii}=J_1^{(i)}$$

са постоянни величини и чрез тях кинетичната енергия на системата се записва във вида

$$T=\sum_{i=1}^{n}J_3^{(i)}(\mathbf{e}_i.\omega_i)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\dot{\mathbf{e}}_i\cdot\dot{\mathbf{e}}_j,$$

където ω_i и $\dot{\mathbf{e}}_i$ са съответно абсолютната ъглова скорост на тяло (i) и абсолютната производна на вектора $\mathbf{e}_i$.

Инерциалната координатна система, за която предполагаме, че векторът $\mathbf{e}_3^{(0)}$ има посока, противоположна на силата на тежестта, означаваме с $Oe_1^{(0)}e_2^{(0)}e_3^{(0)}$. Тензорът Γ_i, задаващ положението на базиса $e^{(i)}$ относно базиса $e^{(0)}$, може да се определи с помощта на три скаларни величини. Най-често това са ъглите на три последователни ротации около съответни оси, привеждащи базиса $e^{(0)}$ в базиса $e^{(i)}$. Обикновено последната ос на въртене е определена от третата координатна ос e_i на базиса $e^{(i)}$. Ако означим с ϕ_i ъгъла на завъртане около тази ос, то абсолютната ъглова скорост ω_i може да се запише във вида $\omega_i = \omega_i' + \dot{\phi}_i e_i$, където ω_i' и e_i не зависят от величините $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Като обобщени координати на системата избираме ъглите $\phi_1, \ldots, \phi_n$ и величини, определящи положението на векторите e_i в инерциалното пространство. Тъй като кинетичната енергия на системата не зависи от $\phi_1, \ldots, \phi_n$, то тези величини се явяват циклични координати, а останалите обобщени координати, определящи векторите e_i — позиционни.

От уравненията на движението, получени в [2], следва съществуването на n първи интеграла

$$(2) \qquad \rho_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} = J_3^{(i)}(\dot{\phi}_i + \omega_i' \cdot e_i) = \rho_{i0} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

където константите $\rho_{10}, \ldots, \rho_{n0}$ са началните стойности на импулсите ρ_i.

Уравненията на движението имат още един първи интеграл, който изразява, че проекцията на кинетичния момент на системата върху вертикалата остава постоянна. Това позволява да се въведе още една циклична координата Ψ, определяща въртенето с постоянна ъглова скорост $\dot{\Psi} e_3^{(0)}$ на една нова координатна система $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, $\zeta_3 = e_3^{(0)}$.

Стационарни движения на произволна механична система са движенията, за които позиционните координати и цикличните скорости остават постоянни. Следователно при стационарните движения на системи от сферични тела цикличните координати ϕ_i, определящи ъгъла на въртене на телата около осите им на симетрия, и ъгълът Ψ на въртене на базиса ζ се изменят линейно във времето, а позиционните координати e_i остават неизменни относно базиса ζ. Това означава, че осите на телата и съединяващите ги шарнири се движат като едно твърдо тяло, въртящо се с постоянна ъглова скорост $\dot{\Psi}$ около вертикалната ос. От своя страна всяко от телата също се върти около оста си на симетрия с определена постоянна ъглова скорост $\dot{\phi}_i$.

Стационарните движения се определят от полагането

$$\dot{e}_3^{(i)} = \dot{\psi} e_3^{(0)} \times e_i, \quad \omega_i = \dot{\psi} e_3^{(0)} + \dot{\phi}_i e_i, \quad \dot{\psi} = \mathrm{const}, \dot{\phi}_i = \dot{\phi}_{i0} = \mathrm{const}$$

в уравненията на движението. Получаваме равенствата

$$(3) \qquad \dot{\psi}^2 e_3^{(0)} \times (e_3^{(0)} \times \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} e_j) + A_i e_3^{(0)} = x_i e_i,$$

където $A_i = M\varepsilon b_i - \dot{\psi}\rho_{i0}$, а x_i са константи. В [2] е получено необходимото и достатъчно условие за съществуване на стационарни движения на разглеждания тип системи тела, което тук ще формулираме в следния вид: Ако съществуват скаларни величини $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_m$ и единични вектори $\mathbf{e}_3^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_3^{(n)}$, за които

$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij}\mathbf{e}_j = y_i \mathbf{e}_3^{(0)}, \quad v_{ij} = \begin{cases} \dot\psi^2 \varepsilon_{ij} & \text{при } i \neq j, \\ j_1^{(i)} + x_i & \text{при } i = j, \end{cases}$$

то движението, определено от началните условия

$$\mathbf{e}_i(t_0) = \mathbf{e}_i, \phi_i(t_0) = \phi_{i0}, \dot\phi_{i0}(t_0) = \dot\phi_{i0} = \frac{Mb_i\varepsilon_{ij} - (\dot\Psi^2 J_3^{(i)} + x_i)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_3^{(0)}}{J_3^{(i)}\dot\Psi},$$

е стационарно и обратно. Ще отбележим, че стационарните движения притежават едно общо свойство, което следва от равенство (3). Нека рангът на матрицата $V = (v_{ij})$ е $r = \mathrm{rank}(V)$ и $V_{i_1}, \dots, V_{i_r}$ са r нейни базисни стълба. Ако небазисните стълбове $V_{j_1}, \dots, V_{j_{n-m}}$ са представени във вида

$$V_{j_m} = -\sum_{s=1}^{r} r_{ms} V_{i_s} \quad (m = 1, \dots, n-r),$$

то могат да се намерят константи $\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_r}$, с помощта на които векторите $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_r}$ се изразяват като линейните комбинации

$$\mathbf{e}_{i_s} = -\sum_{m=1}^{n-r} r_{ms}\mathbf{e}_{j_m} + \varepsilon_{i_s}\mathbf{e}_s^{(0)} \quad (s = 1, \dots, r).$$

Очевидно положенията на осите на телата в пространството при стационарните движения зависят от ранга на матрицата V. При $n = r$ векторите $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ са успоредни на вектора $\mathbf{e}_3^{(0)}$. Ако $r = n-1$, то $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ се изразяват като линейни комбинации на векторите $\mathbf{e}_3^{(0)}$ и $\mathbf{e}_{j_1}$, откъдето следва, че в този случай осите на всички тела са разположени в една вертикална равнина. При $r \leqq n-2$ съществуват стационарни движения с пространствена конфигурация, т. е. не всички оси лежат в една вертикална равнина.

Нека за дадена система тела е намерено едно нейно стационарно движение и нека стационарните стойности на векторите $\mathbf{e}_i$, импулсите ρ_i и ъгловата скорост $\dot\Psi$ са означени съответно с $\eta_i \rho_{i0} (i = 1, \dots, n)$ и $\dot\Psi$. Тогава пресмятаме константите

$$A_i = M_\varepsilon b_i - \dot\Psi\rho_{i0}, (\eta_i \mathbf{e}_3^{(0)})x_i = A_i \quad (i = 1, \dots, n) \tag{4}$$

и диагоналните елементи на матрицата $V = (v_{ij})$

$$v_{ii} = \dot\Psi^2\varepsilon_i + x_{ii} \quad (i = 1, \dots n) \tag{5}$$

(останалите ѝ елементи са константи, зависещи от геометричните и механичните свойства на системата тела). Като имаме предвид условията (3) за съществуване на стационарни движения, ще отбележим, че векторите $\eta_1, \ldots, \eta_n$ удовлетворяват получената по този начин линейна система

$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij}\eta_j = y_i \mathrm{e}_3^{(0)} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

за някакви стойности на $y_1, \ldots, y_n$.

Нека рангът на матрицата V е r и нека $i_1 < \ldots < i_r$ са номерата на r нейни базисни стълба. Останалите стълбове с номера $j_1 < \ldots < j_{n-r}$ се изразяват от линейните зависимости

$$V_{j_m} = -\sum_{s=1}^{r} r_{ms} V_{i_s} \quad (m = 1, \ldots, n-r).$$

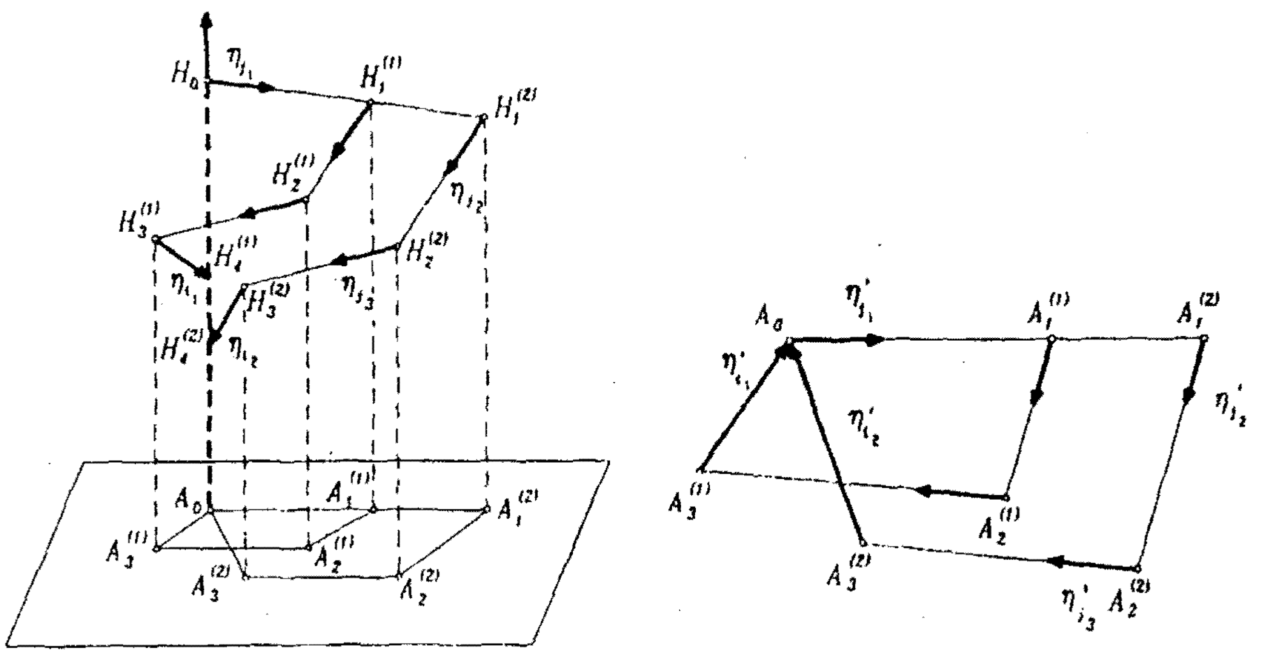
Тогава могат да се намерят такива константи ε_{i_s} $(s = 1, 2, \ldots, r)$, че между векторите $\eta_1, \ldots, \eta_r$ да съществува зависимостта

$$\eta_{i_s} = -\sum_{m=1}^{n-r} r_{ms}\eta_{j_m} + \varepsilon_{i_s}\mathrm{e}_3^{(0)} \quad (s = 1, \ldots, r). \tag{6}$$

Линейна зависимост от този вид има проста геометрична интерпретация (фиг. 3а) — начупените линии $L^{(s)} = H_0^{(s)} H_1^{(s)} \ldots H_{n-r+1}^{(s)}$ $(s = 1, \ldots, r)$, съставени от отсечките

$$\overline{H_{m-1}^{(s)} H_m^{(s)}} = r_{ms} k_m \quad (m = 1, \ldots, n-r), \qquad \overline{H_{n-r}^{(s)} H_{n-r+1}^{(s)}} = \mathrm{e}_{i_s}, \qquad H_0^{(s)} = H_0,$$

определят вектори $\overline{H_0^{(s)} H_{n-r+1}^{(s)}}$, успоредни на вектора $\mathrm{e}_3^{(0)}$.



а б

Фиг. 3

На базата на този геометричен модел ще изследваме съществуването на други стационарни движения, получени при същите стойности $\rho_{10}, \dots, \rho_{n0}$ на импулсите, но при различни единични вектори $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$.

От формули (4) и (5) получаваме, че ако ъглите между векторите $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и вертикалната ос са съответно равни на ъглите, които векторите $\eta_1, \dots, \eta_n$ сключват с вертикалната ос, то матрицата V и началните стойности на импулсите $\rho_{10}, \dots, \rho_{n0}$ няма да се променят. Следователно намирането на друго стационарно движение, определено от векторите $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и същите импулси $\rho_{10}, \dots, \rho_{n0}$, е свързано с техните проекции върху хоризонтална равнина.

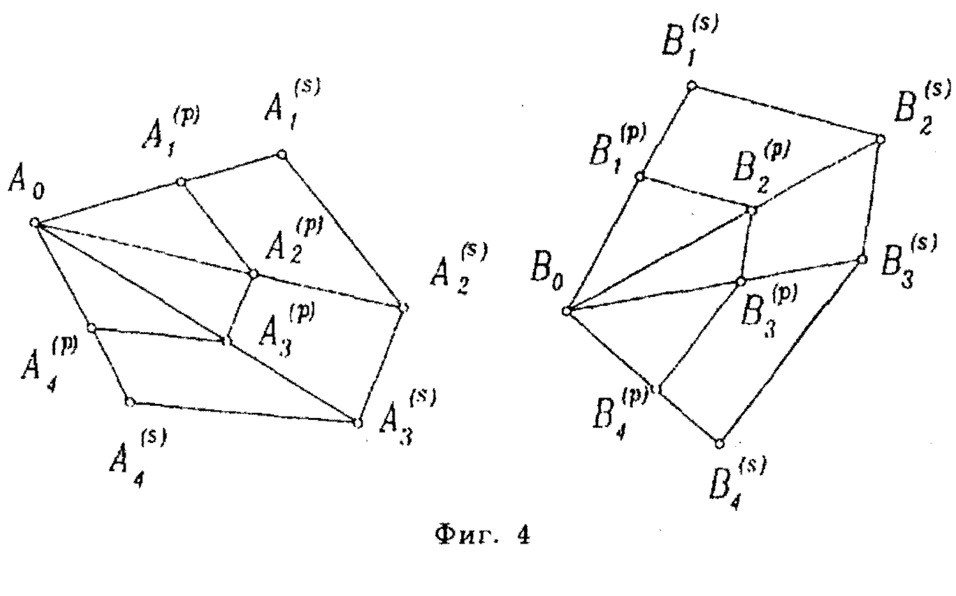
Да разгледаме проекциите на начупените линии $L^{(1)}, \dots, L^{(r)}$ върху такава равнина (фиг. 3б). Тези проекции се състоят от r многоъгълника, $A_0^{(s)} A_1^{(s)} \dots A_{n-r}^{(s)} A_0^{(s)}$, $A_0^{(s)} = A_0$ $(s = 1, \dots, r)$, чиито страни са дефинирани от векторите

$$A_{m-1}^{(s)} A_m^{(s)} = r_{ms} \eta'_{j_m}, \quad A_{n-r}^{(s)} A_0 = \eta'_{i_s} \quad (m = 1, \dots, n-r;\ s = 1, \dots, r).$$

Тук η'_{j_m} и η'_{i_s} са проекциите на векторите η_{j_m} и η_{i_s}. Очевидно съответните страни на многоъгълниците с изключение на страните $A_{n-r}^{(s)} A_0^{(s)}$ са успоредни помежду си. Оттук следва, че за да получим друго стационарно движение, запазващо импулсите, е необходимо да съществуват различни многоъгълници $A_0^{(s)} A_1^{(s)} \dots A_{n-r}^{(s)} A_0^{(s)}$ и $B_0^{(s)} B_1^{(s)} \dots B_{n-r}^{(s)} B_0^{(s)}$ с еднакви дължини на съответните страни. Например такъв случай е възможен, ако проекциите $\eta'_{i_1}, \dots, \eta'_{i_r}$ са колинеарни и всяка двойка от многоъгълниците $A_0^{(s)} A_1^{(s)} \dots A_{n-r}^{(s)} A_0^{(s)}$ и $A_0^{(p)} A_1^{(p)} \dots A_{n-r}^{(p)} A_0^{(p)}$ са подобни, т. е.

$$(7) \qquad \frac{|\eta'_{i_s}|}{|\eta'_{i_p}|} = \frac{|r_{1s}|}{|r_{1p}|} = \dots = \frac{|r_{n-r,s}|}{|r_{n-r,p}|} \quad (s, p = 1, \dots, r).$$

Един пример на такъв случай е изобразен на фиг. 4.



Фиг. 4

Ако разглежданото стационарно движение е определено от такива вектори $\eta_1, \ldots, \eta_n$, че многоъгълниците $A_0^{(s)} A_1^{(s)} \ldots A_{n-r}^{(s)} A_0^{(s)}$ $(s = 1, \ldots, r)$ могат да се построят по единствен начин, то от равенствата $\sphericalangle(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_3^{(0)}) = \sphericalangle(\eta_i, \mathbf{e}_3^{(0)})$ и $\sphericalangle(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \sphericalangle(\eta'_i, \eta'_j)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ следва, че $\mathbf{e}_i = \eta_i$, т. е. стационарното движение, определено от векторите $\eta_1, \ldots, \eta_n$ и импулсите $\rho_{10}, \ldots, \rho_{n0}$, е единствено. Например, ако $n - r = 2$ и не всички вектори $\eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_r}$ са успоредни помежду си, то проекциите на начупените линии — триъгълниците $A_0^{(s)} A_1^{(s)} A_2^{(s)}$ $(s = 1, \ldots, r)$, са с фиксирани дължини и очевидно са построими по единствен начин. Този пример показва, че едно достатъчно условие за единственост на стационарните движения е за дадените стойности на величините $\rho_{10}, \ldots, \rho_{n0}$ да бъде изпълнено неравенството $\operatorname{rank} V \geqq n - 2$.

Ще изследваме устойчивостта на стационарното движение, определено от векторите $\eta_1, \ldots, \eta_n$ и импулсите $\rho_{10}, \ldots, \rho_{n0}$. Тъй като координатите $\phi_1, \ldots, \phi_n$ и Ψ са циклични, то можем да говорим за устойчивост само относно позиционните координати $\mathbf{e}_i$, техните скорости $\dot{\mathbf{e}}_i$ и импулсите $\rho_i = \dfrac{\partial T}{\partial \phi_i}$ ([3]).

Устойчивостта относно импулсите ρ_i следва от съществуването на цикличните първи интеграли (2), които изразяват постоянството на смущенията ε_i на обобщените импулси ρ_i.

Цикличните координати $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ се елиминират с въвеждането на функцията на Раус

$$R = T - \Pi - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \dot{\phi}_i = T - \Pi - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \left(\frac{1}{J_3^{(i)}} \rho_i - (\dot{\Psi} \mathbf{e}_3^{(i)} + \Omega_i) \cdot \mathbf{e}_3^{(i)} \right) = R_2 + R_1 - W.$$

Функциите R_2, R_1 и W обединяват съответно членовете от втора, първа и нулева степен на позиционните скорости. Както е известно [3], всяко стационарно движение може да се разглежда като състояние на равновесие на една нова механична система, наречена приведена, за която функцията W представя нейна потенциална енергия. За да изследваме устойчивостта, ще използваме теоремата на Раус [3]: ако функцията W има изолиран минимум за дадени стойности $\rho_{10}, \ldots, \rho_{n0}$ на импулсите, то стационарното движение е устойчиво по отношение на позиционните координати на всички обобщени скорости поне за смущения, които не изменят константите $\rho_{10}, \ldots, \rho_{n0}$.

Функцията W е образувана от всички членове на R, които не съдържат позиционни скорости, и освен от позиционните координати зависи и от импулсите ρ_i на цикличните координати. Нейният вид може да се получи, ако в израза за R приравним на нула всички позиционни скорости. Тъй като позиционните координати определят положенията на струните и осите на симетрия на телата относно базиса $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, трябва да положим $\omega_i = \dot\Psi \mathbf{e}_3^{(0)} + \dot\phi_i \mathbf{e}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ в израза за функцията на Раус. По такъв начин получаваме

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{J_3^{(i)}}\rho_i^2 + \sum_{i=1}^{n} A_i \mathbf{e}_3^{(0)} \cdot \mathbf{e}_i - \frac{\dot\Psi^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}(\mathbf{e}_3^{(0)} \times \mathbf{e}_i)\cdot(\mathbf{e}_3^{(0)} \times \mathbf{e}_j).$$

Нека

$$W_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{J_3^{(i)}}\rho_{i0}^2 + \sum_{i=1}^{n} A_i \mathbf{e}_3^{(0)} \cdot \eta_i - \frac{\dot\Psi^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}(\mathbf{e}_3^{(0)} \times \eta_i)\cdot(\mathbf{e}_3^{(0)} \times \eta_j)$$

е стойността на приведената потенциална енергия W за дадено стационарно движение. За да определим условията, при които W има изолиран минимум, ще изследваме разликата $W - W_0$ в околност на стационарната точка на приведената система, определена от векторите $\eta_1, \dots, \eta_n$.

Смутеното положение $\mathbf{e}_i$ на вектора η_i ще представим във вида $\mathbf{e}_i = \eta_i + \xi_i$, където ξ_i е вектор с достатъчно малка дължина. Поради равенствата $|\eta_i| = |\mathbf{e}_i| = 1$ векторът ξ_i е подчинен на условието

$$\xi_i^2 = -2\xi_i \cdot \eta_i. \tag{8}$$

За да изключим варирането на цикличната координата $\dot\Psi$, можем да изберем базиса $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T, \zeta_3 = \mathbf{e}_3^{(0)}$ по следния начин: Нека например векторът η_{j_1} не е вертикален и $\zeta_3 = \mathbf{e}_3^{(0)}, \zeta_1 = \mathbf{e}_3^{(0)} \times \eta_{j_1}, \zeta_2 = \zeta_3 \times \zeta_1$. Тогава допускането, че ъгловата скорост $\dot\Psi$ не се смущава, означава, че $\eta_{j_1} = \mathbf{e}_{j_1}$, т. е. смущението на вектора η_{j_1} е $\xi_{j_1} = 0$.

Изчисляваме разликата

$$W - W_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i \mathbf{e}_3^{(0)} \cdot (e_i - \eta_i) - \frac{\dot\Psi^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}[\mathbf{e}_3^{(0)} \times (\eta_i + \xi_i)]\cdot[\mathbf{e}_3^{(0)} \times (\eta_j + \xi_j)]$$
$$+\frac{\dot\Psi^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}(\mathbf{e}_3^{(0)} \times \eta_i)\cdot(\mathbf{e}_3^{(0)} \times \eta_j).$$

Като използваме равенствата (3), (5) и (8), получаваме

$$W - W_0 = \frac{\dot\Psi^2}{2}\sum_{i=1}^{n} g_{ij}(\xi_i \cdot \mathbf{e}_3^{(0)})(\xi_j \cdot \mathbf{e}_3^{(0)}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}\xi_i \cdot \xi_j.$$

По този начин $W - W_0$ е представена като сума от две квадратични форми. Матрицата $(\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^{n}$ участва в израза за кинетичната енергия, така че първата форма е положително дефинитна. Както беше отбелязано, в нетривиалния случай (когато не всички оси на симетрия и струни са вертикални) матрицата $(v_{ij})_{i,j=1}^{n}$ е особена. Тъй като $(-v_{i_s i_p})_{s,p=1}^{r}$ е базисна матрица на матрицата $-V$, то $W - W_0$ се представя във вида

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{ij}(\xi_i \cdot \mathbf{e}_3^{(0)})(\xi_j \cdot \mathbf{e}_3^{(0)}) \tag{9}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{r}\sum_{p=1}^{r} v_{i_s i_p}(\xi_{i_s}+\sum_{m=1}^{n-r} r_{ms}\xi_{j_m})\cdot(\xi_{i_p}+\sum_{i=1}^{n-r} r_{ip}\xi_{j_i}).$$

Като предполагаме, че матриците $(\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^{n}$ и $(-v_{i_s i_p})_{s,p=1}^{r}$ са положително дефинитни, виждаме, че $W-W_0 \geqq 0$ и че $W-W_0=0$ за $\xi_i=0$, $i=1,2,\ldots,n$. Следователно важно е да се намерят случаите, когато уравнението $W-W_0=0$ има и ненулеви решения. Очевидно в този случай уравнението $W-W_0=0$ е в сила за смущенията ξ_i, удовлетворяващи уравненията

$$\xi_i\cdot \mathbf{e}_3^{(0)}=0 \quad (i=1,2,\ldots,n),$$
$$\xi_i^2+2\xi_i\cdot\eta_i=0 \quad (i=1,2,\ldots,n),$$
$$\xi_{i_s}+\sum_{m=1}^{n-r} r_{ms}\xi_{j_m}=0 \quad (s=1,2,\ldots,r).$$

За дадено i първото равенство изразява, че смущението на вектора η_i е перпендикулярно на $\mathbf{e}_3^{(0)}$, а второто — че дължината на смутения вектор $\mathbf{e}_i=\eta_i+\xi_i$ е равна на единица. Оттук следва, че смутеният вектор $\mathbf{e}_i$ се получава от вектора η_i чрез въртене около оста $\mathbf{e}_3^{(0)}$ на някакъв малък ъгъл χ_i. Тогава ξ_i може да се запише във вида

$$(10)\quad \xi_i=\mathbf{e}_i-\eta_i=(1-\cos\chi_i)\mathbf{e}_3^{(0)}\times(\mathbf{e}_3^{(0)}\times\eta_i)+\sin\chi_i\mathbf{e}_3^{(0)}\times\eta_i \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Заместваме в третото равенство

$$(11)\qquad -\cos\chi_{i_s}\mathbf{e}_3^{(0)}\times(\mathbf{e}_3^{(0)}\times\eta_{i_s})+\sin\chi_{i_s}\mathbf{e}_3^{(0)}\times\eta_{i_s}$$
$$+\sum_{m=1}^{n-r} r_{ms}\{-\cos\chi_{j_m}\mathbf{e}_3^{(0)}\times(\mathbf{e}_3^{(0)}\times\eta_{j_m})+\sin\chi_{j_m}\mathbf{e}_3^{(0)}\times\eta_{j_m}\}=0 \quad (s=1,\ldots,r),$$

което записваме във вида

$$\sum_{m=1}^{n-r} r_{ms}(\cos\chi_{i_s}-\cos\chi_{j_m})\mathbf{e}_3^{(0)}\times(\mathbf{e}_3^{(0)}\times\eta_{j_m})+\sum_{m=1}^{n-r} r_{ms}(\sin\chi_{i_s}-\sin\chi_{j_m})\mathbf{e}_3^{(0)}\times\eta_{j_m}=0.$$

Очевидно това равенство е изпълнено за $\chi_{i_s}=\chi_{j_m}=\chi$, т. е. за смущения на системата, при които осите на телата се завъртат около оста $\mathbf{e}_3^{(0)}$ на един и същ ъгъл χ. Но тъй като $\xi_{j_1}=0$, то $\chi_{j_1}=0$, тогава $\chi_1=\ldots=\chi_n=0$ и това е нулевото решение. Сега трябва да определим условията, при които за малки смущения системата (11) има единствено нулевото решение.

Изразът във формула (10)

$$-\cos\chi_i\mathbf{e}_3^{(0)}\times(\mathbf{e}_3^{(0)}\times\eta_i)+\sin\chi_i\mathbf{e}_3^{(0)}\times\eta_i=\cos\chi_i\eta_i'+\sin\chi_i\mathbf{e}_3^{(0)}\times\eta_i$$

дефинира вектор, получен от ортогоналната проекция $\eta_i'=-\mathbf{e}_3^{(0)}\times(\mathbf{e}_3^{(0)}\times\eta_i)$ на вектора η_i чрез ротация на ъгъл χ_i около оста $\mathbf{e}_3^{(0)}$. От друга страна, ако векторът ξ_i е представен във вида (10), то проекцията $\mathbf{e}'_i$ на смутения вектор $\mathbf{e}_i = \eta_i + \xi_i$ се изразява по формулата

$$\mathbf{e}'_i = -\mathbf{e}_3^{(0)} \times [\mathbf{e}_3^{(0)} \times (\eta_i + \xi_i)] = \cos\chi_i \eta'_i + \sin\chi_i \mathbf{e}_3^{(0)} \times \eta_i,$$

при това е очевидно, че $|\mathbf{e}'_i| = |\eta'_i|$. Следователно равенствата (11) се записват във вида

$$\mathbf{e}'_{i_s} = -\sum_{m=1}^{n-r} r_{ms}\mathbf{e}'_{j_m} \quad (s = 1, 2, \ldots, r).$$

Като сравняваме последните равенства със съществуващата между векторите η_i зависимост (6), заключаваме, че $W = W_0$ за вектори $\mathbf{e}_i = \eta_i + \xi_i$, които също са решение на система (6), запазващо дължините на проекциите върху хоризонтална равнина, т. е. $\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_3^{(0)} = \eta_i.\mathbf{e}_3^{(0)}$. Следователно, когато стационарното движение е определено от такава съвкупност от вектори $\eta_1, \ldots, \eta_n$, че построението на многоъгълниците $A_0^{(s)}A_1^{(s)} \ldots A_{n-r}^{(s)}A_0^{(s)}$ е единствено, системата (11) има единствено нулевото решение. В този случай, ако матрицата $\left(-v_{i_s i_p}\right)_{s,p=1}^{r}$ е положително дефинитна, то разликата $W - W_0$ се анулира за даденото стационарно движение и приема положителни стойности в достатъчно малка околност, т. е. това стационарно движение е точка на изолиран минимум на приведената потенциална енергия. Съгласно теоремата на Раус стационарното движение е устойчиво по отношение на позиционните координати и всички обобщени скорости поне за смущения, запазващи началните стойности на импулсите.

Едно достатъчно условие за устойчивост е $\mathrm{rank}V \geqq n-2$ и базисната подматрица на матрицата $-V$ да бъде положително дефинитна. Ще отбележим, че положителната дефинитност на $(-v_{i_s i_p})_{s,p=1}^{r}$ зависи изключително от геометричните характеристики на системата.

Ако за разглежданото стационарно движение многоъгълниците $A_0^{(s)}A_1^{(s)} \ldots A_{n-r}^{(s)}A_0^{(s)}$ $(s = 1, \ldots, r)$ нямат единствено построение, то това движение принадлежи към семейство от стационарни движения, които имат еднакви начални стойности на импулсите, но определящите ги вектори $\eta_1, \ldots, \eta_n$ са различни. За всяко от тези решения функцията $W - W_0$ се анулира и следователно приведената система няма изолиран минимум. Като имаме предвид равенство (9), можем да заключим, че $W - W_0$ е положително дефинитна функция относно проекциите $\mathbf{e}_3^{(0)} \cdot \xi_i$ на смущенията ξ_i върху вертикалната ос и можем да приложим допълнението на Румянцев ([3]) за устойчивост относно част от позиционните координати. Съгласно тази теорема движенията, принадлежащи към това семейство, са устойчиви по отношение на позиционните координати $\gamma_i = \mathbf{e}_3^{(0)} \cdot \mathbf{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и всички обобщени скорости. Броят на позиционните координати в този случай е изследван по-точно в [4].

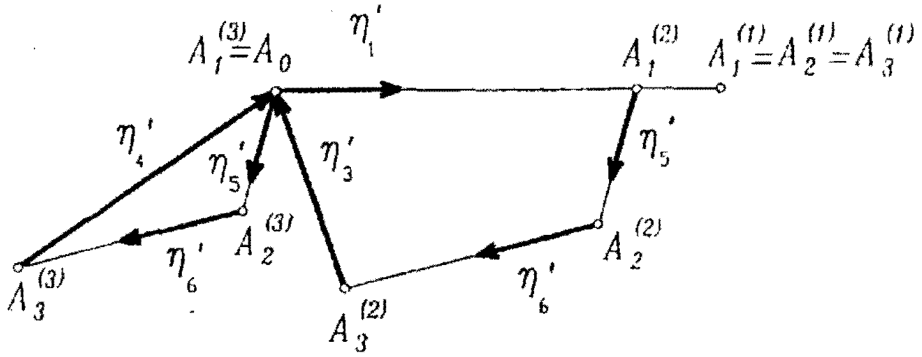
Пример. Ще изследваме някои от стационарните движения на система от шест симетрични тела, представена на фиг. 1. Съответната ѝ матрица V има следния вид:

$$V = M \begin{pmatrix} x_1 & l_1b_2 & l_1b_3 & l_1b_4 & l_1b_5 & l_1b_6 \\ l_1b_2 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1b_3 & 0 & x_3 & l_3b_4 & l_3b_5 & l_3b_6 \\ l_1b_4 & 0 & l_3b_4 & x_4 & 0 & 0 \\ l_1b_5 & 0 & l_3b_5 & 0 & x_5 & l_5b_6 \\ l_1b_6 & 0 & l_3b_6 & 0 & l_5b_6 & x_6 \end{pmatrix}.$$

Едно стационарно движение на тази система е получено в [4] за случая $r = 3$ и базисни стълбове V_2, V_3 и V_4. За стационарните стойности на векторите $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_6$ имаме

$$\eta_2 = \varepsilon_1 \mathbf{e}_3^{(0)} - \sigma\eta_1,$$
$$\eta_3 = \varepsilon_2 \mathbf{e}_3^{(0)} - \frac{l_1}{l_3}\eta_1 - \frac{l_5}{l_3}\left(\eta_5 + \frac{b_6}{b_5}\eta_6\right),$$
$$\eta_4 = \varepsilon_3 \mathbf{e}_3^{(0)} - \frac{l_3b_5 - l_5b_3}{l_3b_4}\left(\eta_5 + \frac{b_6}{b_5}\eta_6\right),$$

където σ е параметър. Проекциите на многоъгълниците $A_0^{(s)}A_1^{(s)}A_2^{(s)}A_3^{(s)}A_0^{(s)}$ $(s = 1, 2, 3)$ са представени на фиг. 5 и при дадени дължини на страните са единствени.



Фиг. 5

Базисната подматрица на $(-V)$ се представя във вида

$$\Delta = -M \begin{pmatrix} \dfrac{l_1b_2}{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & l_3b_3 & l_3b_4 \\ 0 & l_3b_4 & \dfrac{l_3l_5b_4^2}{l_5b_3 - l_3b_5} \end{pmatrix}$$

и е положително дефинитна, ако са изпълнени неравенствата

$$-\frac{l_1b_2}{\sigma} > 0, \quad -l_3b_3 > 0, \quad \frac{l_3^3b_5b_4^2}{l_5b_3 - l_3b_5} > 0.$$

От формула (1) следва, че константите b_i и l_i могат да имат различни знаци само в случая $l_i < 0$, т. е. когато предшестващата точка P_i се намира между барицентъра B_i и другия край Q_i на оста на симетрия. Като имаме предвид това, получаваме, че Δ е положително дефинитна, ако константите σ, l_3, l_5 са отрицателни и $l_5 b_3 < l_3 b_5$. Това означава, че телата (3) и (5) трябва да имат подходящо разпределение на масите.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виттенбург, Й. Динамика систем твердых телл. М., Мир, 1980.
2. Лилов, Л., Н. Василева. Стационарные движения системы гироскопов Лагранжа со структурой дерева. — Теоретична и приложна механика, **XV**, 3, 1984.
3. Румянцев, В. В., А. С. Озиранер. Устойчивост и стабилизация движения по отношению к части переменных. М., Наука, 1987.
4. Василева, Н., Л. Лилов. Устойчивость стационарных движений системы гироскопов Лагранжа со структурой дерева. — Теоретична и приложна механика, **XVIII**, 1, 1987.

Постъпила на 15.09.1994