ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 84, 1990

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 84, 1990

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

ИВАНКА ИВАНОВА-КАРАТОПРАКЛИЕВА

Иванка Иванова-Каратопраклиева. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Исследуются бесконечно малые изгибания высших порядков односвязных кусочно-выпуклых (но глобально невыпуклых) поверхностей Σ_L, полученные при помощи внутреннего склеивания выпуклых соосных поверхностей вращения. Полюс поверхностей предполагается гладкой точкой (непараболической или параболической). Показано, что поверхности Σ_L являются нежесткими любого порядка. Найдены необходимые и достаточные условия для продолжении фундаментального поля бесконечно малого изгибания скольжения 1-го порядка поверхности Σ_L в поле бесконечно малого изгибания скольжения (вдоль параллели L) порядка $m > 1$. Даны достаточные условия жесткости поверхности Σ_L.

Ivanka Ivanova-Karatopraklieva. INFINITESIMAL BENDINGS WITH SLIDING OF HIGHER ORDER OF ROTATIONAL SURFACES

The infinitesimal bendings with sliding of higher order of simply connected piecewise (but not globally) convex surfaces Σ_L, obtained by inner pasting together of convex coaxial rotational surfaces, are investigated. The pole of the surfaces is supposed to be smooth point (nonparabolic or parabolic). It is shown that the surfaces Σ_L are nonrigid of any order. Necessary and sufficient conditions are found for extension of a fundamental field of infinitesimal bending with sliding of the 1-st order of the surface Σ_L to a field of infinitesimal bending with sliding (allong the parallel L) of the order $m > 1$. Sufficient conditions for rigidity of the surface Σ_L are given.

1. Бесконечно малое (б. м.) изгибание S_t порядка $m \geqq 1$ поверхности S называется б. м. изгибанием скольжения вдоль линии $L \subset S$ относительно плоскости μ, если растояние любой точки $M \in L$ до плоскости μ не меняется с точностью до б. м. порядка m относительно t. Х. Либман первый исследовал [1] такие б. м. изгибания и доказал, что на сфере существует счетное множество параллелей L_k, такие, что для любой параллели L_k бо̀льшая часть сферы, ограниченная L_k, допускает нетривиальное б. м. изгибание скольжения 1-го порядка вдоль L_k относительно ее плоскости (дальше такие параллели будем называть либмановыми). Потом Е. Рембс доказал [2], что либмановые сферические сегменты допускают и б. м. изгибание скольжения 2-го порядка, но являются жесткими 3-го порядка. Им было доказано еще, что на замкнутой выпуклой поверхности вращения S тоже существует счетное множество либмановых параллелей L_k 2-го порядка и они сгущаются к наибольшей параллели поверхности S (часть S_{L_k} поверхности S, которая допускает б. м. изгибания скольжения имеет бо̀льшую интегральную кривизну, чем $S \setminus S_{L_k}$).

Позже, А. Д. Милка [3] обобщил результат Е. Рембса, рассматривая б. м. изгибания скольжения 1-го порядка поверхностей вращения положительной кривизны, вдоль параллели L относительно произвольной плоскости, а Е. Андрейчин и И. Х. Сабитов [4] показали, что результат Е. Рембса для либмановых параллелей 1-го порядка имеет место и для общих выпуклых поверхностей вращения.

В настоящей статье исследуем вопрос о б. м. изгибаниях скольжения высших порядков одного класса невыпуклых поверхностей, которые получены при помощи внутреннего склейвания выпуклых соосных поверхностей вращения. Вопросы о существовании, мощности и расположении либмановых параллелей 1-го и 2-го порядка таких поверхностей рассмотрены в [5–7].

Отметим, что о б. м. изгибаниях скольжения порядка $m > 2$ нам не известны другие работы, кроме [8–10]. В них исследованы б. м. изгибания 3-го порядка двух классов односвязных поверхностей вращения — ребристые в [8, 9] и кусочно 2-кратно гладкие с непараболическим полюсом в [10].

2. Пусть в плоскости Ouy заданы кривые

$$c_i : y = r_i(u),\ u \in J_i,\ i = 1, \dots, s,\ s \geqq 2,$$

где $J_i = [u_{i,i+1}\ u_{i-1,i}]$, когда i четное, и $J_i = [u_{i-1,i}\ u_{i,i+1}]$, когда i нечетное, $r_1(u) \in C(J_1) \cap C^2(J_1 \setminus u_{0,1})$, $r_s \in C(J_s) \cap C^2(J_s \setminus u_{s,s+1})$, либо $r_s(u) \in C^2(J_s)$, а $r_i(u) \in C^2(J_i)$, $i = 2, \dots, s-1$. Пусть

$$(1)\qquad r_1(u_{0,1}) = r_s(u_{s,s+1}) = 0, \qquad \begin{cases} r_1(u) > 0 & \text{в } J_1 \setminus u_{0,1}, \\ r_s(u) > 0 & \text{в } J_s \setminus u_{s,s+1}, \\ r_i(u) > 0 & \text{в } J_i,\ i = 2, \dots, s-1; \end{cases}$$

$$(2)\qquad r_i''(u) \leqq 0,\ r_i(u) < r_{i-1}(u) \ \text{ в } \ J_{i-1} \cap (J_i \setminus u_{i-1,i}),$$
$$r_i(u_{i-1,i}) = r_{i-1}(u_{i-1,i}), c_i \cap c_j = \varnothing \text{ при } j \neq i-1 \text{ и } j \neq i+1, i = 1, \dots, s.$$

Рассмотрим кусочно-выпуклую замкнутую поверхность вращения $\Sigma = S_1 \cup \ldots \cup S_s$ с меридианом $c = c_1 \cup \ldots \cup c_s$ и с осью Ou вращения (выпуклые поверхности S_{i-1} и S_i внутренне склеенные вдоль их общей параллели $u = u_{i-1,i}$).

Пусть в окрестности полюса $u = u_1$ (будем использовать обозначение $u_1 = u_{0,1}$) кривая c_1 имеет представление

$$(3) \qquad u = u_1 + y^n f_1(y), \quad f_1(0) \neq 0, \quad f_1(y) \in C^A[0, \varepsilon), \quad n \geqq 2,$$

и когда для некоторого $j \in [2, s]$ кривые c_{j-1} и c_j касаются в точке склейвания $u_{j-1,j}$, выполнено

(4) $J_j \subseteq J_{j-1}$ (равенство допускается только тогда, когда c_{j-1} и c_{j-2} касаются в точке склейвания $u_{j-2,j-1}$) и
$r_j''(u) r_{j-1}(u) - r_{j-1}''(u) r_j(u) \leqq 0$ в J_j, если $j \in [2, s-1]$, и
в $J_s \setminus u_{s,s+1}$, если $j = s$.

Отметим, что при $n = 2$ полюс $u = u_1$ является непараболической точкой поверхности, а при $n > 2$ — параболической, и следовательно — точкой уплощения поверхности.

Представим радиус-вектор поверхности Σ в виде

$$x(u, v) = u.e_3 + r(u).e(v), \quad r(u)\big|_{J_i} = r_i(u), \quad v \in [0, 2\pi],\ i = 1, \ldots, s,$$

а ее деформацию как $x(u,v) \mapsto x(u,v) + \sum\limits_{j=1}^{m} t^j \overset{j}{U}(u,v)$, где

$$(5) \qquad \overset{j}{U}(u,v) = \overset{j}{\alpha}(u,v).e_3 + \overset{j}{\beta}(u,v).e + \overset{j}{\gamma}(u,v).e', \quad j = 1, \ldots, m,$$
$$e(v) = \cos v.e_1 + \sin v.e_2$$

(e_1, e_2, e_3 — орты координатной системы в $\mathbf{R}^3$).

В [5] доказано, что на части S_s поверхности Σ существуют либмановые параллели, если

(6) $r_{s-1}'(u_{s-1,s}) < 0$, когда s четно, и $r_{s-1}'(u_{s-1,s}) > 0$, когда s нечетно.

Для любой такой параллели $L \in S_s$ часть Σ_L поверхности Σ, которая содержит полюс $u = u_1$ и ограничена параллелью L, допускает нетривиальное б. м. изгибание скольжения 1-го порядка вдоль L относительно ее плоскости.

Пусть поверхность Σ удовлетворяет условиям (1)–(4) и (6). Пусть L : $u = \hat{u}$ — либмановая параллель 1-го порядка поверхности S_s и $\overset{1}{U}(u,v) = \overset{1}{U}_k(u,v)$, $k \geqq 2$, нетривиальное фундаментальное поле [11] б. м. изгибания скольжения 1-го порядка поверхности Σ_L. Ищем поля $\overset{j}{U}(u,v)$, $j = 2, \ldots, m$, б. м. изгибания скольжения порядка $j = 2, \ldots, m$ поверхности Σ_L, которые являются продолжениями поля $\overset{1}{U}_k(u,v)$, $k \geqq 2$. Будем предполагать, что поля $\overset{j}{U}(u,v)$, $j = 1, \ldots, m$, принадлежат классу C^2 на гладких кусках поверхности вне полюса $u = u_1$ и непрерывные на Σ_L. Такие поля будем называть регулярными класса $\check{C}^2(\Sigma_L)$.

Координаты $\overset{j}{\alpha}(u,v)$, $\overset{j}{\beta}(u,v)$, $\overset{j}{\gamma}(u,v)$ поля $\overset{j}{U}(u,v)$ относительно подвижного репера e_3, e, e' имеют вид [11]:

$$(7)\qquad \overset{j}{\alpha}(u,v) = \sum_{(p)} \left[\overset{j}{\varphi}_{pk}(u)e^{ipkv} + \overset{j}{\varphi}_{-pk}(u)e^{-ipkv}\right],$$

$$\overset{j}{\beta}(u,v) = \sum_{(p)} \left[\overset{j}{\chi}_{pk}(u)e^{ipkv} + \overset{j}{\chi}_{-pk}(u)e^{-ipkv}\right],$$

$$\overset{j}{\gamma}(u,v) = \sum_{(p)} \left[\overset{j}{\psi}_{pk}(u)e^{ipkv} + \overset{j}{\psi}_{-pk}(u)e^{-ipkv}\right],\ j = 1,\ldots,m,$$

где $\overset{j}{\varphi}_{-pk}(u) = \overset{\bar{j}}{\varphi}_{pk}(u)$, $\overset{j}{\chi}_{-pk}(u) = \overset{\bar{j}}{\chi}_{pk}(u)$, $\overset{j}{\psi}_{-pk}(u) = \overset{\bar{j}}{\psi}_{pk}(u)$, $p = 0,2,\ldots,j$, когда j четное, и $p = 1,3,\ldots,j$, когда j нечетное. Функции $\overset{j}{\varphi}_{pk,i}(u)$, $\overset{j}{\chi}_{pk,i}(u)$, $\overset{j}{\psi}_{pk,i}(u)$, которые соответствуют полям $\overset{j}{U}_i(u,v) = \overset{j}{U}(u,v)\big|_{S_i}$, $i = 1,\ldots,s$, удовлетворяют системам

$$(8)\qquad \overset{j}{\varphi}{}'_{pk,i}(u) + r_i'(u)\overset{j}{\chi}{}'_{pk,i}(u) = \overset{j}{R}_{1,pk,i}(u),$$

$$\overset{j}{\chi}_{pk,i}(u) + ipk\overset{j}{\psi}_{pk,i}(u) = \overset{j}{R}_{2,pk,i}(u),$$

$$ipk\overset{j}{\varphi}_{pk,i}(u) + r_i'(u)\left[ipk\overset{j}{\chi}_{pk,i}(u) - \overset{j}{\psi}_{pk,i}(u)\right] + r_i(u)\overset{j}{\psi}{}'_{pk,i}(u) = \overset{j}{R}_{3,pk,i}(u),$$

$$j = 1,\ldots,m,$$

где

$$(9)\qquad \overset{1}{R}_{1,k,i}(u) = \overset{1}{R}_{2,k,i}(u) = \overset{1}{R}_{3,k,i}(u) \equiv 0;$$

$$(10)\ \overset{j}{R}_{1,pk,i} = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{(r_l)}\Big(\overset{l}{\varphi}{}'_{r_lk,i}\overset{j-l}{\varphi}{}'_{(p-r_l)k,i}$$

$$+\overset{l}{\chi}{}'_{r_lk,i}\overset{j-l}{\chi}{}'_{(p-r_l)k,i} + \overset{l}{\psi}{}'_{r_lk,i}\overset{j-l}{\psi}{}'_{(p-r_l)k,i}\Big),$$

$$\overset{j}{R}_{2,pk,i} = -\frac{1}{2r_i}\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{(r_l)}\Big\{-k^2r_l(p-r_l)\overset{l}{\varphi}_{r_lk,i}\overset{j-l}{\varphi}_{(p-r_l)k,i}$$

$$+\left(ir_lk\overset{l}{\chi}_{r_lk,i} - \overset{l}{\psi}_{r_lk,i}\right)\left[i(p-r_l)k\overset{j-l}{\chi}_{(p-r_l)k,i} - \overset{j-l}{\psi}_{(p-r_l)k,i}\right]$$

$$+\left(ir_lk\overset{l}{\psi}_{r_lk,i} + \overset{l}{\chi}_{r_lk,i}\right)\left[i(p-r_l)k\overset{j-l}{\psi}_{(p-r_l)k,i} + \overset{j-l}{\chi}_{(p-r_l)k,i}\right]\Big\},$$

$$\overset{j}{R}_{3,pk,i} = -\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{(r_l)}\Big\{ i(p-r_l)k\overset{l}{\varphi}{}'_{r_l k,i}\overset{j-l}{\varphi}_{(p-r_l)k,i}$$
$$+\overset{l}{\chi}{}'_{r_l k,i}\left[i(p-r_l)k\overset{j-l}{\chi}_{(p-r_l)k,i}-\overset{j-l}{\psi}_{(p-r_l)k,i}\right]$$
$$+\overset{l}{\psi}{}'_{r_l k,i}\left[i(p-r_l)k\overset{j-l}{\psi}_{(p-r_l)k,i}+\overset{j-l}{\chi}_{(p-r_l)k,i}\right]\Big\}, \qquad j=2,\dots,m.$$

Отметим, что сумационый индекс r_l в (10) принимает значения в множестве $\{0,\ \pm 2,\dots,\ \pm l\}$, когда l четное, и в множестве $\{\pm 1,\ \pm 3,\ \dots,\ \pm l\}$, когда l нечетное. Притом r_l такой, что $p - r_l$ принадлежит множеству $\{0,\ \pm 2,\dots,\ \pm(j-l)\}$, когда $j-l$ четное, и множеству $\{\pm 1,\ \pm 3,\dots,\ \pm(j-l)\}$, когда $j-l$ нечетное. Кроме этого символ i употреблен в (10) двумя способами — как индекс и как множитель. Когда он употреблен как индекс принимает значения $1,\dots,s$, а как множитель обозначает мнимую единицу.

Из (8) при $p=0$ (j — четное) имеем

$$\text{(11)} \qquad \overset{j}{\varphi}{}'_{0,i}(u)+r_i'(u)\overset{j}{\chi}{}'_{0,i}(u)=\overset{j}{R}_{1,0,i}(u),$$
$$\overset{j}{\chi}_{0,i}(u)=\overset{j}{R}_{2,0,i}(u),$$
$$r_i(u)\overset{j}{\psi}{}'_{0,i}(u)-r_i'(u)\overset{j}{\psi}_{0,i}(u)=\overset{j}{R}_{3,0,i}(u),$$

а при $p\neq 0$ — соответственно:

$$\text{(12)} \qquad \overset{j}{\varphi}_{pk,i}(u)=-\frac{1}{p^2k^2}\left[r_i(u)\overset{j}{\chi}{}'_{pk,i}(u)+(p^2k^2-1)r_i'(u)\overset{j}{\chi}_{pk,i}(u)+\overset{j}{P}_{pk,i}(u)\right],$$

где

$$\text{(13)} \qquad \overset{j}{P}_{pk,i}(u)=r_i'(u)\overset{j}{R}_{2,pk,i}(u)-r_i(u)\overset{j}{R}{}'_{2,pk,i}(u)+pki\overset{j}{R}_{3,pk,i}(u);$$

$$\text{(14)} \qquad \overset{j}{\psi}_{pk,i}(u)=\frac{1}{pki}\left[\overset{j}{R}_{2,pk,i}(u)-\overset{j}{\chi}_{pk,i}(u)\right],$$

и $\overset{j}{\chi}_{pk,i}(u)$ удовлетворяет уравнению

$$\text{(15)} \qquad r_i(u)\overset{j}{\chi}{}''_{pk,i}(u)+r_i''(u)(p^2k^2-1)\overset{j}{\chi}_{pk,i}(u)=\overset{j}{R}_{pk,i}(u),$$

где

$$\text{(16)} \qquad \overset{j}{R}_{pk,i}(u)=-r_i''(u)\overset{j}{R}_{2,pk,i}(u)+r_i(u)\overset{j}{R}{}''_{2,pk,i}(u)$$
$$-p^2k^2\overset{j}{R}_{1,pk,i}(u)-pki\overset{j}{R}{}'_{3,pk,i}(u).$$

Притом при $j=1$, т. е. для фундаментального поля $\overset{1}{U}_k(u,v)$, $k \geqq 2$, имеем $\overset{1}{P}_{k,i}(u)=\overset{1}{R}_{k,i}(u)\equiv 0$, $i=1,\ \dots,\ s$ (см. (9), (13), (16)).

3. Легко видно, что поверхность Σ_L нежестка любого порядка $m \geqq 2$. В самом деле, поверхность S_1 такова, так как у нее нет асимптотических параллелей и согласно [12] любое ее нетривиальное, регулярное фундаментальное поле $\overset{1}{U}_{k,1}(u,v)$ 1-го порядка, для которого

$$k > A(m,n) = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{n(m-1)[n(2m-1)-2m]}{n-1}},$$

можно продолжить в регулярное поле $\overset{j}{U}_1(u,v) \in \check{C}^2(S_1)$ б. м. изгибания порядка $j = 2,\dots,m$. Притом для функции $\overset{j}{\varphi}_{pk,1}(u)$, $\overset{j}{\chi}_{pk,1}(u)$, $\overset{j}{\psi}_{pk,1}(u)$, которые определяют поле $\overset{j}{U}_1 = \overset{j}{U}\big|_{S_1}$, $j = 1,\dots,m$, имеем:

1) $\overset{1}{\chi}_{k,1}(u) = \chi^{+}_{k,1}(u)$ — регулярное решение уравнения (15) при $j = p = i = 1$ в J_1, а $\overset{1}{\varphi}_{k,1}(u)$ и $\overset{1}{\psi}_{k,1}(u)$ получаются соответственно из (12) и (14) при $j = p = i = 1$;

2) При $p = 0$ (j — четное)

$$\overset{j}{\varphi}_{0,1}(u) = \int\limits_{u_1}^{u}\left[\overset{j}{R}_{1,0,1}(\tau) - r_1'(\tau)\overset{j}{R}{}'_{2,0,1}(\tau)\right]d\tau + \overset{j}{a}_{0,1}, \qquad \overset{j}{a}_{0,1} = \mathrm{const}, \tag{17}$$

$$\overset{j}{\chi}_{0,1}(u) = \overset{j}{R}_{2,0,1}(u),$$

$$\overset{j}{\psi}_{0,1}(u) = r_1(u)\left[\int\limits_{u_1}^{u}\frac{\overset{j}{R}_{3,0,1}(\tau)}{r_1^2(\tau)}\,d\tau + \overset{j}{b}_{0,1}\right], \qquad \overset{j}{b}_{0,1} = \mathrm{const};$$

3) При $p \neq 0$, $j \geqq 2$.

$$\overset{j}{\chi}_{pk,1}(u) = \chi^{+}_{pk,1}(u)\left[\overset{j}{c}_{pk} + \int\limits_{u_0}^{u}\overset{j}{D}{}^{-}_{pk,1}(\tau)\,d\tau\right] - \chi^{-}_{pk,1}(u)\int\limits_{u_1}^{u}\overset{j}{D}{}^{+}_{pk,1}(\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

где $\overset{j}{c}_{pk} = \mathrm{const}$, $u_0 \in (u_1,\ u_{1,2})$,

$$\overset{j}{D}{}^{\pm}_{pk,1}(u) = \frac{\overset{j}{R}_{pk,1}(u)}{r_1(u)W_{pk,1}(u)}\,\chi^{\pm}_{pk,1}(u),$$

$$W_{pk,1}(u) = \chi^{+\prime}_{pk,1}(u)\chi^{-}_{pk,1}(u) - \chi^{+}_{pk,1}(u)\chi^{-\prime}_{pk,1}(u)$$

($\chi^{+}_{pk,1}(u)$, $\chi^{-}_{pk,1}(u)$ — фундаментальные решения однородного уравнения (15) в $(u_1,\ u_{1,2}]$, притом $\chi^{+}_{pk,1}(u)$ — регулярное, $\chi^{-}_{pk,1}(u)$ — нерегулярное в $u = u_1$), а $\overset{j}{\varphi}_{pk,1}(u)$ и $\overset{j}{\psi}_{pk,1}(u)$ получаются соответственно из (12) и (14).

Дальше из непрерывности полей $\overset{j}{U}$, $j = 1, \dots, m$, следует, что функции $\overset{j}{\varphi}_{pk,i}(u)$, $\overset{j}{\chi}_{pk,i}(u)$, $\overset{j}{\psi}_{pk,i}(u)$, $i = 2, \dots, s$, $j = 1, \dots, m$, являются решениями систем уравнений (8) при начальных условиях

$$\begin{aligned}(19)\qquad &\overset{j}{\varphi}_{pk,i}(u_{i-1,i}) = \overset{j}{\varphi}_{pk,i-1}(u_{i-1,i}), \quad \overset{j}{\chi}_{pk,i}(u_{i-1,i}) = \overset{j}{\chi}_{pk,i-1}(u_{i-1,i}),\\ &\overset{j}{\psi}_{pk,i}(u_{i-1,i}) = \overset{j}{\psi}_{pk,i-1}(u_{i-1,i}), \quad i = 2, \dots, s,\ j = 1, \dots, m.\end{aligned}$$

Из (11) (см. также (17)) видно, что при $p = 0$ задача (8), (19) всегда имеет решение, а из (12)–(16) и (19) видно, что при $p \neq 0$, i, j — фиксированные, она сводится к решению задачи Коши для уравнения (15) при начальных условиях

$$\begin{aligned}(20)\qquad &\overset{j}{\chi}_{pk,i}(u_{i-1,i}) = \overset{j}{\chi}_{pk,i-1}(u_{i-1,i}),\\ &\overset{j}{\chi}{}'_{pk,i}(u_{i-1,i}) = \left[\overset{j}{\chi}{}'_{pk,i-1} + (p^2k^2 - 1)\frac{r'_{i-1} - r'_i}{r_i}\overset{j}{\chi}_{pk,i-1} + \overset{j}{Q}_{pk,i-1,i}\right]\Bigg|_{u=u_{i-1,i}},\end{aligned}$$

где

$$(21)\qquad \overset{j}{Q}_{pk,i-1,i}(u) = \frac{1}{r_i(u)}\left(\overset{j}{P}_{pk,i-1}(u) - \overset{j}{P}_{pk,i}(u)\right).$$

Заметим, что $\overset{1}{Q}_{pk,i-1,i}(u_{i-1,i}) = 0$ (см. (9)) и, кроме этого, когда кривые c_{i-1} и c_i касаются в точке склейвания, т. е. когда $r'_{i-1}(u_{i-1,i}) = r'_i(u_{i-1,i})$, условия (20) принимают вид

$$(20')\qquad \overset{j}{\chi}_{pk,i}(u_{i-1,i}) = \overset{j}{\chi}_{pk,i-1}(u_{i-1,i}), \quad \overset{j}{\chi}{}'_{pk,i}(u_{i-1,i}) = \overset{j}{\chi}{}'_{pk,i-1}(u_{i-1,i})$$

(из (10), (12), (13), (19), (21) видно, что тогда $\overset{j}{Q}_{pk,i-1,i}(u_{i-1,i}) = 0$).

Таким образом, решая последовательно задачу (15), (20), при $i = 2, \dots, s$, $j = 1, \dots, m$, мы найдем поля $\overset{j}{U}_i(u, v)$, $i = 2, \dots, s$, б. м. изгибания порядка $j = 1, \dots, m$ поверхности Σ_L, которые принадлежат классу $\breve{C}^2(\Sigma_L)$.

4. В этом пункте будет дан вид решения задачи (15), (20). Пусть $\chi^{+}_{pk,1}$ и $\chi^{-}_{pk,1}$ являются фундаментальными решениями однородного уравнения (15) при $i = 1$, где $\chi^{+}_{pk,1}$ — регулярное в $u = u_1$, а $\chi^{-}_{pk,1}$ — нерегулярное. Обозначим через $\chi^{\pm}_{pk,i}$, $i = 2, \dots, s$, решения одонродного уравнения (15) при начальных условиях (20) с $\overset{1}{Q}_{pk,i-1,i}(u_{i-1,i}) = 0$, т. е.

$$\begin{aligned}(22)\qquad &\chi^{\pm}_{pk,i}(u_{i-1,i}) = \chi^{\pm}_{pk,i-1}(u_{i-1,i}),\\ &\chi^{\pm\prime}_{pk,i}(u_{i-1,i}) = \left[\chi^{\pm\prime}_{pk,i-1} + (4k^2 - 1)\frac{r'_{i-1} - r'_i}{r_i}\chi^{\pm}_{pk,i-1}\right]\Bigg|_{u=u_{i-1,i}},\end{aligned}$$

соответственно для $i = 2, \dots, s$. Очевидно $\chi^{+}_{pk,i}(u)$ и $\chi^{-}_{pk,i}(u)$, $i = 2, \dots, s$, являются фундаментальными решениями однородного уравнения (15) при

$i=2,\dots,s$ и $W_{pk,i-1}(u_{i-1,i})=W_{pk,i}(u_{i-1,i})$. Отметим, что функции $\chi^{+}_{pk,i}(u)$, $i=1,\dots,s$, определяют регулярное поле $\overset{1}{U}{}^{+}_{pk}(u,v)$ б. м. изгибания 1-го порядка класса $\check{C}^2(\Sigma_L)$ поверхности Σ_L, а функции $\chi^{-}_{pk,i}(u)$, $i=1,\dots,s$ — нерегулярное в полюсе $u=u_1$ поле $\overset{1}{U}{}^{-}_{pk}(u,v)$ б. м. изгибания 1-го порядка. Притом как функции $\varphi^{+}_{pk,i}(u)$, $\chi^{+}_{pk,i}(u)$, $\psi^{+}_{pk,i}(u)$, так и функции $\varphi^{-}_{pk,i}(u)$, $\chi^{-}_{pk,i}(u)$, $\psi^{-}_{pk,i}(u)$ удовлетворяют системе

$$
\begin{aligned}
(23)\qquad & \overset{1}{\varphi}{}'_{pk,i}(u)+r_i'(u)\overset{1}{\chi}{}'_{pk,i}(u)=0\\
& \overset{1}{\chi}_{pk,i}(u)+ipk\overset{1}{\psi}_{pk,i}(u)=0,\\
& ipk\overset{1}{\varphi}_{pk,i}(u)+r_i'(u)\left[ipk\overset{1}{\chi}_{pk,i}(u)-\overset{1}{\psi}_{pk,i}(u)\right]+r_i(u)\overset{1}{\psi}{}'_{pk,i}(u)=0,
\end{aligned}
$$

а условие (22_2) выражает, что

$$
(24)\qquad \varphi^{\pm}_{pk,i}(u_{i-1,i})=\varphi^{\pm}_{pk,i-1}(u_{i-1,i}).
$$

Рассмотрим регулярное в полюсе $u=u_1$ решение (см. (18))

$$
(18')\qquad \overset{j}{\chi}_{pk,1}(u)=\overset{j}{c}_{pk}\chi^{+}_{pk,1}(u)+\overset{j}{\chi}{}^{*}_{pk,1}(u),\quad u\in J_1,\ j\geqq 2,
$$

уравнения (15) при $i=1$, где $\overset{j}{c}_{pk}$ произвольная константа, а

$$
(25)\qquad \overset{j}{\chi}{}^{*}_{pk,1}(u)=\chi^{+}_{pk,1}(u)\int_{u_0}^{u}\overset{j}{D}{}^{-}_{pk,1}(\tau)\,d\tau-\chi^{-}_{pk,1}(u)\int_{u_1}^{u}\overset{j}{D}{}^{+}_{pk,1}(\tau)\,d\tau.
$$

В виду $(18')$ и (25) условия (20) при $i=2$ принимают вид

$$
\begin{aligned}
(26)\qquad & \overset{j}{\chi}_{pk,2}(u_{1,2})=\overset{j}{c}_{pk}\chi^{+}_{pk,1}(u_{1,2})+\overset{j}{\chi}{}^{*}_{pk,1}(u_{1,2}),\\
& \overset{j}{\chi}{}'_{pk,2}(u_{1,2})=\overset{j}{c}_{pk}\left[\chi^{+}_{pk,1}+(p^2k^2-1)\frac{r_1'-r_2'}{r_2}\chi^{+}_{pk,1}\right]\Bigg|_{u=u_{1,2}}\\
& \qquad+\left[\overset{j}{\chi}{}^{*\prime}_{pk,1}+(p^2k^2-1)\frac{r_1'-r_2'}{r_2}\overset{j}{\chi}{}^{*}_{pk,1}+\overset{j}{Q}_{pk,1,2}\right]\Bigg|_{u=u_{1,2}}.
\end{aligned}
$$

При помощи метода Лагранжа строим частное решение

$$
(27)\qquad \overset{j}{\chi}{}^{*}_{pk,2}(u)=\chi^{-}_{pk,2}(u)\int_{u_{1,2}}^{u}\overset{j}{D}{}^{+}_{pk,2}(\tau)\,d\tau-\chi^{+}_{pk,2}(u)\int_{u_{1,2}}^{u}\overset{j}{D}{}^{-}_{pk,2}(\tau)\,d\tau,\qquad u\in J_2,
$$

уравнения (15) при $i=2$. Обозначим через $\overset{j}{\tilde{\chi}}{}^{*}_{pk,2}(u)$ это решение уравнения (15) при $i=2$, которое удовлетворяет условиям

$$
\begin{aligned}
(28)\qquad & \overset{j}{\tilde{\chi}}{}^{*}_{pk,2}(u_{1,2})=\overset{j}{\chi}{}^{*}_{pk,1}(u_{1,2}),\\
& \overset{j}{\tilde{\chi}}{}^{*\prime}_{pk,2}(u_{1,2})=\left[\overset{j}{\chi}{}^{*\prime}_{pk,1}+(p^2k^2-1)\frac{r_1'-r_2'}{r_2}\overset{j}{\chi}{}^{*}_{pk,1}+\overset{j}{Q}_{pk,1,2}\right]\Bigg|_{u=u_{1,2}}
\end{aligned}
$$

Тогда

$$\overset{j}{\tilde{\chi}}{}^{*}_{pk,2}(u)=\overset{j}{a}{}^{1}_{pk,2}\chi^{+}_{pk,2}(u)+\overset{j}{a}{}^{2}_{pk,2}\chi^{-}_{pk,2}(u)+\overset{j}{\chi}{}^{*}_{pk,2}(u),\qquad u\in J_2,$$

и из (25), (27), (28) и (23) получаем

$$\overset{j}{a}{}^{1}_{pk,2}=\frac{1}{r_1W_{pk,1}}\left\{p^2k^2\left[\chi^{-}_{pk,1}\varphi^{-}_{pk,2}-\chi^{-}_{pk,2}\varphi^{-}_{pk,1}\right]\int\limits_{u_1}^{u}\overset{j}{D}{}^{+}_{pk,1}(\tau)\,d\tau\right.$$

$$\left.\left.+p^2k^2\left[\chi^{-}_{pk,2}\varphi^{+}_{pk,1}-\chi^{+}_{pk,1}\varphi^{-}_{pk,2}\right]\int\limits_{u_0}^{u}\overset{j}{D}{}^{-}_{pk,1}(\tau)\,d\tau-r_1\overset{j}{Q}_{pk,1,2}\chi^{-}_{pk,2}\right\}\right|_{u=u_{1,2}},$$

$$\overset{j}{a}{}^{2}_{pk,2}=\frac{1}{r_1W_{pk,1}}\left\{p^2k^2\left[\chi^{+}_{pk,2}\varphi^{-}_{pk,1}-\chi^{-}_{pk,1}\varphi^{+}_{pk,2}\right]\int\limits_{u_1}^{u}\overset{j}{D}{}^{+}_{pk,1}(\tau)\,d\tau\right.$$

$$\left.\left.+p^2k^2\left[\chi^{+}_{pk,1}\varphi^{+}_{pk,2}-\chi^{+}_{pk,2}\varphi^{+}_{pk,1}\right]\int\limits_{u_0}^{u}\overset{j}{D}{}^{-}_{pk,1}(\tau)\,d\tau+r_1\overset{j}{Q}_{pk,1,2}\chi^{+}_{pk,2}\right\}\right|_{u=u_{1,2}}.$$

Теперь из (22) и (24) следует

$$\left.\left[\chi^{\pm}_{pk,1}\varphi^{\pm}_{pk,2}-\chi^{\pm}_{pk,2}\varphi^{\pm}_{pk,1}\right]\right|_{u=u_{1,2}}=0,$$

$$\left.p^2k^2\left[\chi^{\pm}_{pk,2}\varphi^{\mp}_{pk,1}-\chi^{\mp}_{pk,1}\varphi^{\pm}_{pk,2}\right]\right|_{u=u_{1,2}}=\left.r_1W_{pk,1}\right|_{u=u_{1,2}},$$

откуда

(29) $$\overset{j}{a}{}^{1}_{pk,2}=\int\limits_{u_0}^{u_{1,2}}\overset{j}{D}{}^{-}_{pk,1}(\tau)\,d\tau-\left.\frac{\overset{j}{Q}_{pk,1,2}\chi^{-}_{pk,1}}{W_{pk,1}}\right|_{u=u_{1,2}},$$

$$\overset{j}{a}{}^{2}_{pk,2}=\int\limits_{u_1}^{u_{1,2}}\overset{j}{D}{}^{+}_{pk,1}(\tau)\,d\tau+\left.\frac{\overset{j}{Q}_{pk,1,2}\chi^{+}_{pk,1}}{W_{pk,1}}\right|_{u=u_{1,2}}.$$

Таким образом решение $\overset{j}{\chi}_{pk,2}(u)$ задачи (15), (20) при $i=2$, т. е. задачи (15), (26), имеет вид

(30) $$\overset{j}{\chi}_{pk,2}(u)=\left(\overset{j}{c}_{pk}+\overset{j}{a}{}^{1}_{pk,2}\right)\chi^{+}_{pk,2}(u)+\overset{j}{a}{}^{2}_{pk,2}\chi^{-}_{pk,2}(u)+\overset{j}{\chi}{}^{*}_{pk,2}(u),\qquad u\in J_2,$$

где $\overset{j}{c}_{pk}$ произвольная константа, $\overset{j}{a}{}^{1}_{pk,2}$ и $\overset{j}{a}{}^{2}_{pk,2}$ имеют вид (29), а $\overset{j}{\chi}{}^{*}_{pk,2}(u)$ — вид (27).

Решая задачу (15), (20) при $i=3$ таким же образом как при $i=2$, получаем, что решение $\overset{j}{\chi}_{pk,3}(u)$ имеет вид

$$\overset{j}{\chi}_{pk,3}(u)=\left(\overset{j}{c}_{pk}+\overset{j}{a}{}^{1}_{pk,2}+\overset{j}{a}{}^{1}_{pk,3}\right)\chi^{+}_{pk,3}(u)+\left(\overset{j}{a}{}^{2}_{pk,2}+\overset{j}{a}{}^{2}_{pk,3}\right)\chi^{-}_{pk,3}(u)+\overset{j}{\chi}{}^{*}_{pk,3}(u),$$

$u \in J_3$, где

$$\overset{j}{a}{}^{1}_{pk,3} = -\int\limits_{u_{1,2}}^{u_{2,3}} \overset{j}{D}{}^{-}_{pk,2}(\tau)\,d\tau - \left.\frac{\chi^{-}_{pk,2}\overset{j}{Q}_{pk,2,3}}{W_{pk,2}}\right|_{u=u_{2,3}},$$

$$\overset{j}{a}{}^{2}_{pk,3} = \int\limits_{u_{1,2}}^{u_{2,3}} \overset{j}{D}{}^{+}_{pk,2}(\tau)\,d\tau + \left.\frac{\chi^{+}_{pk,2}\overset{j}{Q}_{pk,2,3}}{W_{pk,2}}\right|_{u=u_{2,3}},$$

$$\overset{j}{\chi}{}^{*}_{pk,3}(u) = \chi^{-}_{pk,3}(u)\int\limits_{u_{2,3}}^{u} \overset{j}{D}{}^{+}_{pk,3}(\tau)\,d\tau - \chi^{+}_{pk,3}(u)\int\limits_{u_{2,3}}^{u} \overset{j}{D}{}^{-}_{pk,3}(\tau)\,d\tau,\ u \in J_3.$$

Продолжая дальше, найдем решения $\overset{j}{\chi}_{pk,4}(u), \ldots, \overset{j}{\chi}_{pk,s}(u)$. Очевидно решение $\overset{j}{\chi}_{pk,i}(u)$, $u \in J_i$, $j \geqq 2$, $i = 2, \ldots, s$, задачи (15), (20) имеет вид

$$\overset{j}{\chi}_{pk,i}(u) = \left(\overset{j}{c}_{pk} + \overset{j}{a}{}^{1}_{pk,2} + \cdots + \overset{j}{a}{}^{1}_{pk,i}\right)\chi^{+}_{pk,i}(u) + \left(\overset{j}{a}{}^{2}_{pk,2} + \cdots + \overset{j}{a}{}^{2}_{pk,i}\right)\chi^{-}_{pk,i}(u) + \overset{j*}{\chi}_{pk,i}(u), \tag{31}$$

где

$$\overset{j}{a}{}^{1}_{pk,2} = \int\limits_{u_0}^{u_{1,2}} \overset{j}{D}{}^{-}_{pk,2}(\tau)\,d\tau - \left.\frac{\overset{j}{Q}_{pk,1,2}}{W_{pk,1}}\chi^{-}_{pk,1}\right|_{u=u_{1,2}}, \tag{32}$$

$$\overset{j}{a}{}^{1}_{pk,l} = -\int\limits_{u_{l-2,l-1}}^{u_{l-1,l}} \overset{j}{D}{}^{-}_{pk,l-1}(\tau)\,d\tau - \left.\frac{\overset{j}{Q}_{pk,l-1,l}\chi^{-}_{pk,l-1}}{W_{pk,l-1}}\right|_{u=u_{l-1,l}},\ l = 3, \ldots, i,$$

$$\overset{j}{a}{}^{2}_{pk,l} = \int\limits_{u_{l-2,l-1}}^{u_{l-1,l}} \overset{j}{D}{}^{+}_{pk,l-1}(\tau)\,d\tau + \left.\frac{\overset{j}{Q}_{pk,l-1,l}\chi^{+}_{pk,l-1}}{W_{pk,l-1}}\right|_{u=u_{l-1,l}},\ l = 2, \ldots, i; \tag{33}$$

$$\overset{j*}{\chi}_{pk,i}(u) = \chi^{-}_{pk,i}(u)\int\limits_{u_{i-1,i}}^{u} \overset{j}{D}{}^{+}_{pk,i}(\tau)\,d\tau - \chi^{+}_{pk,i}(u)\int\limits_{u_{i-1,i}}^{u} \overset{j}{D}{}^{-}_{pk,i}(\tau)\,d\tau,\ u \in J_i, \tag{34}$$

где $\overset{j}{D}{}^{\pm}_{pk,i}(u) = \dfrac{\overset{j}{R}_{pk,i}(u)}{r_i(u)W_{pk,i}(u)}\chi^{\pm}_{pk,i}(u)$.

Таким образом вид функции $\overset{2}{\chi}_{pk,i}(u), \ldots, \overset{m}{\chi}_{pk,i}(u)$, $i = 1, \ldots, s$, когда $p \neq 0$, дается при помощи формул (18′) и (31).

5. Теперь найдем условия скольжения поверхности Σ_L. Из (5) и (7) видно, что фундаментальное поле $\overset{1}{U}(u, v) = \overset{1}{U}_k(u, v)$ и его продолжения

$\overset{j}{U}(u,v)$, $j=2,\dots,m$, являются полями б. м. изгибания скольжения порядка $j=1,\dots,m$ поверхности Σ_L вдоль параллели $L: u=\hat{u}$ относительно ее плоскости точно тогда, когда

$$(35)\qquad \overset{j}{\varphi}_{pk,s}(\hat{u})=0,\ \ p=\begin{cases}0,2,\dots,j, & \text{когда } j \text{ — четное},\\ 1,3,\dots,j, & \text{когда } j \text{ — нечетное}, \ j=1,\dots,m.\end{cases}$$

Предположим, что регулярное поле $\overset{1}{U}_k(u,v)$ б. м. изгибания скольжения 1-го порядка продолжено в регулярное поле $\overset{l}{U}(u,v)$ б. м. изгибания скольжения порядка $l=2,\dots,j-1$. Из (35) видно, что продолженное поле $\overset{j}{U}(u,v)$ б. м. изгибания порядка j будет полем скольжения вдоль L точно тогда, когда $\overset{j}{\varphi}_{pk,s}(\hat{u})=0$ при $p=0,2,\dots,j$, когда j — четное, и при $p=1,3,\dots,j$, когда j — нечетное. Из (11) видно, что при $p=0$ (j — четное) это условие всегда можно удовлетворить за счет выбора интеграционной константы (см. (17)). В том случае, когда $p\neq 0$ из (12), (31) и (34) непосредственно получаем, что $\overset{j}{\varphi}_{pk,s}(\hat{u})=0$ точно тогда, когда

$$(36)\qquad \left[\overset{j}{c}_{pk}+\overset{j}{a}{}^{1}_{pk,2}+\dots+\overset{j}{a}{}^{1}_{pk,s}-\int\limits_{u_{s-1,s}}^{u}\overset{j}{D}{}^{-}_{pk,s}(\tau)\,d\tau\right]$$
$$\times\left[r_s\chi^{+\prime}_{pk,s}+(p^2k^2-1)r'_s\chi^{+}_{pk,s}\right]\Big|_{u=\hat{u}}$$
$$+\left[\overset{j}{a}{}^{2}_{pk,2}+\dots+\overset{j}{a}{}^{2}_{pk,s}+\int\limits_{u_{s-1,s}}^{u}\overset{j}{D}{}^{+}_{pk,s}(\tau)\,d\tau\right]$$
$$\times\left[r_s\chi^{-\prime}_{pk,s}+(p^2k^2-1)r'_s\chi^{-}_{pk,s}\right]\Big|_{u=\hat{u}}+\overset{j}{P}_{pk,s}(\hat{u})=0.$$

Пусть p фиксировано. Очевидно условие (36) можно удовлетворить за счет выбора константы $\overset{j}{c}_{pk}$ только тогда, когда

$$r_s(\hat{u})\chi^{+\prime}_{pk,s}(\hat{u})+(p^2k^2-1)r'_s(\hat{u})\chi^{+}_{pk,s}(\hat{u})\neq 0,$$

т. е. когда поле $\overset{1}{U}{}^{+}_{pk}(u,v)$ б. м. изгибания 1-го порядка не является полем скольжения поверхности Σ_L вдоль параллели L. В противном случае условие (36) принимает вид

$$(37)\qquad \left[\overset{j}{a}{}^{2}_{pk,2}+\dots+\overset{j}{a}{}^{2}_{pk,s}+\int\limits_{u_{s-1,s}}^{u}\overset{j}{D}{}^{+}_{pk,s}(\tau)\,d\tau\right]$$
$$\times\left[r_s\chi^{-\prime}_{pk,s}+(p^2k^2-1)r'_s\chi^{-}_{pk,s}\right]\Big|_{u=\hat{u}}+\overset{j}{P}_{pk,s}(\hat{u})=0.$$

Напомним, что величина $\overset{j}{P}_{pk,s}(\hat{u})$ в (36) и (37) получается из (13), отчитывая равенства $\overset{l}{\varphi}_{pk,s}(\hat{u}) = 0$, где $p = 0, 2, \ldots, l$, когда l — четное, и $p = 1, 3, \ldots, l$, когда l — нечетное, $l = 1, \ldots, j-1$.

Таким образом имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть поверхность Σ_L имеет регулярное фундаментальное поле $\overset{1}{U}_k$ б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль параллели L: $u = \hat{u}$, где $k > A(m,n)$ и m четное число $(m = 2l)$. Пусть $\overset{1}{U}_k$ продолжено в регулярное поле $\overset{m-1}{U}$ б. м. изгибания скольжения $(m-1)$-го порядка вдоль L. Тогда:*

а) *Если Σ_L не имеет регулярных фундаментальных полей $\overset{1}{U}_{2k}, \overset{1}{U}_{4k}, \ldots, \overset{1}{U}_{mk}$ б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L, то $\overset{1}{U}_k$ можно продолжить в регулярное поле $\overset{m}{U}$ б. м. изгибания скольжения $m = 2l$-го порядка вдоль L.*

б) *Если Σ_L имеет регулярное фундаментальное поле $\overset{1}{U}_{2hk}$, $1 < 2h \leqq \leqq m = 2l$, б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L, то $\overset{1}{U}_k$ можно продолжить в регулярное поле $\overset{m}{U}$ б. м. изгибания скольжения $m = 2l$-го порядка тогда и только тогда, когда выполнено условие (37) при $j = m$ и $p = 2h$.*

Следствие 1. *Если поверхность Σ_L имеет конечное число регулярных фундаментальных полей $\overset{1}{U}_{k_i}$, $i = 1, \ldots, q$, $2 \leqq k_1 < \cdots < k_q$, б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L, и допускает б. м. изгибание скольжения нечетного порядка $m-1$ вдоль L, порожденное из некоторого поля $\overset{1}{U}_{k_i}$, $k_i > \max\left(\dfrac{k_q}{2}, A(m,n)\right)$, $m = 2l$, то Σ_L допускает нетривиальное б. м. изгибание скольжения $m = 2l$-го порядка вдоль L.*

Теорема 2. *Пусть поверхность Σ_L имеет регулярное фундаментальное поле $\overset{1}{U}_k$ б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль параллели $L : u = \hat{u}$, где $k > A(m,n)$ и m нечетное число $(m = 2l+1)$. Пусть $\overset{1}{U}_k$ продолжено в регулярное поле $\overset{m-1}{U}$ б. м. изгибания скольжения $(m-1)$-го порядка вдоль L. Тогда:*

а) *Если Σ_L не имеет регулярных фундаментальных полей $\overset{1}{U}_{3k}, \overset{1}{U}_{5k}, \ldots, \overset{1}{U}_{mk}$ б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L, то $\overset{1}{U}_k$ можно продолжить в регулярное поле $\overset{m}{U}$ б. м. изгибания скольжения $m = (2l+1)$-го порядка вдоль L тогда и только тогда, когда выполнено условие (37) при $j = m$ и $p = 1$.*

б) *Если Σ_L имеет регулярное фундаментальное поле $\overset{1}{U}_{(2h+1)k}$, $1 < < 2h+1 \leqq m = 2l+1$, б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L, то $\overset{1}{U}_k$ можно продолжить в регулярное поле $\overset{m}{U}$ б. м. изгибания скольжения*

$m = (2l+1)$-го порядка вдоль L, тогда и только тогда, когда выполнено условие (37) при $j = m$, $p = 1$ и $j = m$, $p = 2h+1$.

Следствие 2. *Если поверхность Σ_L имеет конечное число регулярных фундаментальных полей $\overset{1}{U}_{k_i}$, $i = 1, \ldots, q$, $2 \leqq k_1 < \cdots < k_q$, б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L, допускает б. м. изгибание скольжения четного порядка $m-1$ вдоль L, порожденное из некоторого поля $\overset{1}{U}_{k_i}$, $k_i > \max\left(\frac{k_q}{3}, A(m,n)\right)$, $m = 2l+1$, и выполнено условие (37) при $j = m$, $p = 1$, $k = k_i$, то Σ_L допускает нетривиальное б. м. изгибание скольжения $m = (2l+1)$-го порядка вдоль L.*

Теорема 3. *Пусть поверхность Σ_L имеет регулярное фундаментальное поле $\overset{1}{U}_k$ б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль параллели $L : u = \hat{u}$, где $k > A(m,n)$ и $m > 1$. Тогда:*

а) *Если Σ_L не имеет регулярных фундаментальных полей $\overset{1}{U}_{2k}$, $\overset{1}{U}_{3k}, \ldots$, $\overset{1}{U}_{mk}$ б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L, то поле $\overset{1}{U}_k$ можно продолжить в регулярное поле $\overset{m}{U}$ б. м. изгибания скольжения m-го порядка вдоль L тогда и только тогда, когда выполнено условие (37) при $j = 3, 5, \ldots, 2l+1 \leqq m$ и $p = 1$.*

б) *Если Σ_L имеет регулярное фундаментальное поле $\overset{1}{U}_{hk}$, $1 < h \leqq m$, б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L, то поле $\overset{1}{U}_k$ можно продолжить в регулярное поле $\overset{m}{U}$ б. м. изгибания скольжения m-го порядка вдоль L тогда и только тогда, когда условие (37) выполнено при $j = 3$, $5, \ldots, 2l+1 \leqq m$, $p = 1$ и при $j = h, h+2, \ldots, h+2l \leqq m$, $p = h$.*

Следствие 3. *Если поверхность Σ_L имеет конечное число регулярных фундаментальных полей $\overset{1}{U}_{k_i}$, $i = 1, \ldots, q$, $2 \leqq k_1 < \cdots < k_q$, б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L и условие (37) выполнено для некоторого $k = k_i > \max\left(\frac{k_q}{2}, A(m,n)\right)$, $m > 1$, при $j = 3, 5, \ldots, 2l+1 \leqq m$, $p = 1$, то Σ_L допускает нетривиальное б. м. изгибание скольжения m-го порядка вдоль L.*

В [12] доказано, что условие $k > A(m,n)$ является и необходимым (за исключением может быть для не больше чем $5(m-2) + 3\left(\left[\frac{m}{2}\right] - 1\right)$ значений $n > 2$ при $m > 3$) для того, чтобы регулярное фундаментальное поле $\overset{1}{U}_k$ б. м. изгибания 1-го порядка поверхности S_1 можно продолжить в регулярное поле $\overset{m}{U}$ б. м. изгибания m-го порядка. Там еще показано, что никакое регулярное фундаментальное поле $\overset{1}{U}_k$, $k < \sqrt{2n}$, б. м. изгибания 1-го порядка нельзя продолжить в регулярное поле $\overset{m}{U}$ б. м. изгибания порядка $m \geqq \dfrac{n}{n - \nu_k(n)}$, где $\nu_k(n) = \sqrt{\left(\dfrac{n-2}{2}\right)^2 + k^2(n-1)} - \dfrac{n-2}{2}$.

Пусть $n > 2$ такое, что условие $k > A(m,n)$ является необходимым. Тогда имеют место следующие утверждения.

Следствие 4. *Если поверхность Σ_L не имеет других регулярных фундаментальных полей б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L, кроме полей $\overset{1}{U}_{k_i}$, $1 \leqq i \leqq q$, $2 \leqq k_1 < \cdots < k_q \leqq A(m,n)$, то Σ_L обладает жесткостью m-го порядка по отношению к б. м. изгибаниям скольжения вдоль L.*

Следствие 5. *Если поверхность Σ_L не имеет других регулярных фундаментальных полей б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L, кроме полей $\overset{1}{U}_{k_i}$, $1 \leqq i \leqq q$, $2 \leqq k_1 < \cdots < k_q < \sqrt{2n}$, то Σ_L обладает жесткостью порядка $m \geqq \dfrac{n}{n - \nu_k(n)}$ по отношению к б. м. изгибаниям скольжения вдоль L.*

Замечание. Утверждения в теоремах 1–3 и в следствиях 1–5 имеют место и для односвязных 2-кратно гладких поверхностей вращения без асимптотических параллелей. Тогда в условии (37) имеем $s = 1$ и $\overset{j}{a}{}^2_{pk,2} = \cdots = \overset{j}{a}{}^2_{pk,s} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Liebmann, H. Bedingte Flächenverbiegungen, inbesondere Gleitverbiegungen. — Sitz. der Bayerische Ak. d. Wiss. (Müncher Berichte), 1920, 21–48.
2. Rembs, E. Über Gleitverbiegungen. — Math. Ann., **111**, 1935, 587–595.
3. Милка, А. Д. О точках относительной нежесткости выпуклых поверхностей вращения. — Укр. геом. сборник, I, 1965, 63–74.
4. Андрейчин, Е.Р., И. Х. Сабитов. Обобщение теоремы Рембса на общие выпуклые поверхности вращения. — Укр. геом. сборник, **26**, 1983, 13–24.
5. Иванова-Каратопраклиева, И. О бесконечно малых изгибаниях скольжения некоторых составных поверхностей вращения. — Матем. заметки, 10(5), 1971, 549–554.
6. Иванова-Каратопраклиева, И. Нежесткость второго порядка некоторых составных поверхностей вращения. — Сердика, 3(2), 1977, 159–167.
7. Иванова-Каратопраклиева, И. Върху безкрайно малките огъвания от втори ред на някои класове ротационни повърхнини. — Год. Соф. унив., Фак. по мат. и мех., **79**, кн. 1 — Математика, 1985, 149–160.
8. Перлова, Н. Г. О скользящих бесконечно малых изгибаниях 1-го, 2-го и 3-го порядков ребристых поверхностей вращения, ограниченных одной параллелью. — Comment. math. Univ. Carolinae, **12**(4), 1971, 807–823.
9. Перлова, Н. Г., Е. Н. Кононова. О скользящих бесконечно малых изгибаниях третьего порядка. — Изв. Сев. Кавк. научного центра высш. школ. Естеств. науки, I, 1989, 40–43.
10. Андрейчин, Е. Р. Безкрайно малки огъвания с хлъзгане от трети ред на някои ротационни повърхнини. Год. Соф. унив., Фак. по мат. и мех., **79**, кн. 1 — Математика, 1985, 271–285.
11. Cohn-Vossen, S. Unstarre geschlossene Flächen. — Math. Ann., **102**, 1929, 10–29.
12. Ivanova-Karatopraklieva, I. Infinitesimal bendings of higher order of rotational surfaces. — Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, **43**(12), 1990, 13–16.

Получена 16.05.1991