

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 2 — Механика

Том 86, 1992

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 2 — Mécanique

Tome 86, 1992

---

ДИСПЕРСИОННО УРАВНЕНИЕ ПРИ ВЪЛНОВ РЕЖИМ  
НА ИЗТЪНЯВАНЕ НА ТЪНКИ ТЕЧНИ ФИЛМИ  
С ОТЧИТАНЕ НА ЕЛАСТИЧНИТЕ СВОЙСТВА  
НА МЕЖДУФАЗОВИТЕ ГРАНИЦИ

ЗАПРЯН ЗАПРЯНОВ

*Запрян Запрян*. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ПРИ ВОЛНОВОМ РЕЖИМЕ ДВИЖЕНИЯ ПЕННЫХ И ЭМУЛЬСИОННЫХ ПЛЕНОК

Адсорбирование поверхностно-активных веществ (ПАВ) модифицирует поверхностную вязкость и эластичность, и поэтому играет важную роль в стабилизации пен и эмульсий. Настоящая работа исследует волновые движения жидкости при утончении жидких пленок. Изучается влияние эластичных свойств межфазовых (газо-жидких или жидко-жидких) поверхностей на волновом режиме движения эмульсионных и пенных пленок. Получено дисперсионное уравнение волнового движения жидкости в пленках.

*Zapryan Zapryanov*. DISPERSION EQUATION OF WAVE REGIME FOR FILM DRAINAGE WITH ELASTIC PROPERTIES OF INTERFACE BOUNDARIES

Adsorbed species play an important role in foam stabilization, emulsion stability, and suspension polymerization by modifying interfacial viscosity and elasticity. The present paper deals with the wave motion in thinning films. The influence of elastic properties on the gas-liquid (and liquid-liquid) film interfaces is investigated. The dispersion equation for wave motion of the film interfaces is derived.

Важна роля в поведението на някои дисперсни системи (пени, емулсии и др.) играят тънките течни слоеве между частиците, изграждащи системата. В много случаи свойствата на дисперсната среда се определят от

времето на изтъняване на тънките течни филми между частиците.

Макар, пропорционално взето, обемната част на хидродинамичния филм да съдържа много повече флуид в сравнение с флуида, намиращ се върху границите му, процесът на неговото изтъняване се влияе съществено от реологичните свойства на междуфазовите му повърхности.

Когато флуидът във филма съдържа повърхностно активни вещества (ПАВ), които поради характера си се стремят „да отседнат“ на повърхността му, междуфазовият слой по границите изменя своите композиционни свойства значително в сравнение със свойствата на обемната фаза. Това довежда в някои случаи до силни отклонения от свойствата на нютоновите междуфазови повърхнини. По такъв начин процесът на изтъняване и разрушаване на такива филми започва да се влияе силно от адсорбираните на повърхността еластични характеристики и тяхното ненютоново поведение.

Както е известно, през 1913 г. Бусинеск [1] предложи двумерен аналог на тримерните уравнения на Навие—Стокс и с това даде описание на поведението на нютоновите междуфазови повърхности.

Конститутивните уравнения за изотропичните вискозно-еластични междуфазови повърхнини се извеждат аналогично на уравненията за нютоновите междуфазови повърхнини.

Ламб [2] и Годрич [3] показват как изучаването на капилярните вълни може да послужи като удобно средство за изучаване на реологичните свойства на междуфазовите граници, например за определяне на повърхностното напрежение, повърхностния вискозитет, еластичните характеристики и др. Капилярни вълни в неизтъняващи емулсионни филми са изследвани още от Люкасен и др. — [4] в случая на неразтворими ПАВ, Гумерман и Хомси — [5] за случая на сферични филми от чисти флуиди, и Джейн и Рукенщейн — [6] за едностранни филми с разтворими ПАВ.

В докторската си дисертация на тема „Извод на междуфазовите свойства от експерименти с капилярни вълни“ Мауер [7] изследва еластичните свойства на междуфазовите повърхности. Въз основа на модела на на Войт в теоретичната част от своите изследвания той разглежда ненютонови повърхности на неизтъняващи течни филми. Сравняването на теоретичните и експерименталните резултати му дава възможност да определи еластичните характеристики на междуфазовите повърхности. В споменатия модел Войт [8] дава най-простите конститутивни уравнения за вискозно-еластични междуфазови повърхнини като подходяща комбинация на конститутивните уравнения за чисто вискозни и чисто еластични междуфазови повърхнини. Олдроид [9] също предлага конститутивни уравнения на вискозно-еластични повърхнини, но те са по-сложни. Напоследък Гарднер и др. [10] предложиха конститутивни уравнения за сложни вискозно-еластични повърхности на „запаметяване“.

В тази статия ще изследваме вълновия режим за изтъняване на тънки течни филми с отчитане на еластичните свойства на междуфазовите граници. Граничните условия на междуфазовите граници на изтъняващия

филм се вземат съгласно конститутивните уравнения на Войт за вискозно-еластични междуфазови повърхнини. Основните предположения са:

1) Реологичното поведение на обемните фази считаме нютоново, докато реологичното поведение на границите на филма ще предполагаме ненютоново. За да комбинираме вискозните и еластичните напрежения, ще изхождаме от конститутивните уравнения на Войт [8].

2) Изтъняването на филма и вълновото движение във филма считаме за независими [11, 12].

3) Ще считаме, че ПАВ са разтворени само в дисперсната среда (филма) и че обменът на ПАВ между филма и неговата повърхност е дифузно контролируем.

Като изберем за характерни величини общоприетите в тази област, ще получим следните безразмерни величини, които характеризират разглеждания проблем:

$$W_e = \frac{\nu\mu}{R\sigma_0}, \quad D_s^* = \frac{D_s R}{\nu}, \quad S_e = \frac{\nu}{D},$$

$$a = \frac{\hat{\mu}}{\mu}, \quad \mu_s^* = \frac{\mu_s}{\mu R}, \quad \Lambda^* = \frac{\Lambda}{\frac{\mu^2}{\rho R}}, \quad G^* = \frac{G}{\frac{\mu^2}{\rho R}}.$$

Нови параметри тук са  $\Lambda$  и  $G$  — повърхностните коефициенти на еластичността ( $\Lambda$  е разтягащият коефициент на еластичността, а  $G$  — тангенциалният).

Във връзка с изучаването на вълновия режим на движение на флуидите през 1890 г. лорд Келвин [13], като използва уравненията за движение на вискозни флуиди и гранични условия, включващи повърхностното напрежение, получава известното дисперсно уравнение

$$\omega^2 = gk + \sigma \frac{k^3}{\rho},$$

където  $\omega$  е честотата,  $k$  — вълновото число,  $g$  — земното ускорение,  $\rho$  — плътността и  $\sigma$  — повърхностното напрежение. Той извършва изследванията си за капилярни вълни въз основа на нестационарните уравнения на Стокс, които описват бавните движения. През 1932 г. Ламб [2] обобщава резултатите на Келвин, като използва нов подход, станал след това класически в изследванията на вълновите движения в хидродинамиката, но също включва в граничните условия само повърхностното напрежение като характеристика на междуфазовите граници. Много автори, които са изследвали вълнови движения на вискозни флуиди, са се придържали към постановката и анализа, дадени от Ламб. През 1943 г. Уейгхард [14] включва в граничното условие на междуфазовата граница на вълните освен повърхностното напрежение още и повърхностния вискозитет, както той е бил въведен от Бусинеск. Известен опит за включване в граничните условия на междуфазовата граница на вълните и на еластичните характеристики на флуидните повърхнини наред с повърхностния вискозитет и

повърхностното напрежение прави през 1951 г. Дорещейн [15]. През 1941 г. Левич [16] премахва от своите изследвания повърхностния вискозитет и поставя ограничителното условие за неподвижност на междуфазовата граница в хоризонтално направление не само при неразтворимите монослое (филми), но и за разтворимите. През 1964 г. Нансен и Ман [17] предлагат теория на вълновите движения при наличие на безкрайна междуфазова граница, като намират връзка между обемната вискозност, повърхностния вискозитет и еластичните модули на границата. Аналогични изследвания правят и Ван ден Темпл и Ван ден Рит [18]. Интересен, но по-сложен модел за изследване на вълновите движения е предложен от Ринтар, Израел и Васан [19].

През 1979 г. Иванов и др. [12] разглеждат вълнов режим на движение на филми с оглед изследването на устойчивостта на тънки течни филми с нютоннови междуфазови граници.

В настоящата статия въз основа на простия модел на Войт е изследван вълновият режим на движение на радиално ограничените течни филми, като в граничните условия на междуфазовите граници са отчетени освен повърхностното напрежение и повърхностния вискозитет още и еластичните характеристики на междуфазовите повърхности на филма, т. е. изследван е вълновият режим на движение на тънки течни филми с нютоннови междуфазови граници. Изведено е обобщено дисперсно уравнение за вълновото движение на пенните и емулсионните филми.

Вследствие на термични флуктуации и други причини повърхностите на водните системи най-често са с вълнообразен характер. Профилът на такава повърхност във всеки момент може да се представи като суперпозиция на безкраен брой вълни с различни дължини и амплитуди. Положението на всяка вълна в тънък течен слой се определя до голяма степен от съотношението на два фактора — локалното капилярно налягане, което се стреми да анулира амплитудата на вълната, и отрицателното разклинящо налягане, което се стреми да увеличи нейната амплитуда. При малки дебелини на течния филм преобладава действието на разклинящото налягане, а при големи — капилярното налягане. При определени дебелини на филма двата ефекта се уравниават.

Ако двете междуфазови граници на филма са нагънати симетрично, той ще се скъса, когато амплитудата на вълната стане равна на половината от дебелината му, т. е. на  $h$ . Тази дебелина, при която става скъсване на филма, се нарича критична дебелина на скъсване —  $h_{cr}$ .

При движението на флуида адсорбиралият монослой на ПАВ върху границата на филма се свива и разпуца, т. е. проявява своето еластично поведение, което от своя страна се отразява на характера на вълновото движение.

За всяка вълна с вълново число  $k$  съществува дебелина  $h_0$  на филма, при която се извършва преход от колебания около равновесното положение към преминаване към непрекъснато увеличаваща се амплитуда на

вълната. През 1962 г. Шелудко [20] предложи следната формула за величината  $h_0$ :

$$(1) \quad h_0 = \left( \frac{3\pi^2 K}{16\sigma k^2} \right)^{1/4},$$

където  $K$  е константата на Вандерваалс,  $\sigma$  — повърхностното напрежение и  $\pi = -\frac{K}{h^3}$  е разклинящото налягане.

Иванов и др. [12] показаха, че когато отклонението на вълната  $\zeta$  от равновесното положение на филма  $h$  е малко, общите уравнения за движение на флуида във филма могат да се разделят на две системи — първата, описваща изтъняването на цилиндричния плоскопаралелен филм, и втората — вълновия режим на движението му. Съгласно Врей [21] и Иванов и др. [22] симетричните смущения са най-съществени, когато се разглежда въпросът за устойчивостта на филма. При разглеждането на вълновия режим на движение във филма ние ще имаме предвид филми с дебелини, близки до  $h_{cr}$ , така че честотата  $\omega$  на вълната да не зависи явно от времето. Това позволява да разгледаме независимо вълнообразното движение от изтъняването на филма.

За вертикалното  $\zeta$  и хоризонталното  $\xi$  отклонение на повърхнината на филма от равновесното му положение ще имаме

$$(2) \quad v_z = v_\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{при } z = h,$$

$$(3) \quad v_r = U = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{при } z = h.$$

Тогава дебелината  $H$  на филма ще бъде

$$H = 2(h + \zeta).$$

Във връзка с направените по-горе предположения ще използваме следното гранично условие за  $\zeta$ :

$$(4) \quad \zeta = 0 \quad \text{при } r = 1.$$

Уравненията на движение в дисперсната фаза имат вида

$$(5) \quad \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right),$$

$$(6) \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right),$$

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) = 0.$$

Решението за вълновия режим на движение ще търсим във вида

$$(8) \quad \begin{aligned} v_r &= v_r^{(0)} + v_r^{(1)}, \\ v_z &= v_z^{(0)} + v_z^{(1)}. \end{aligned}$$

Тук  $v_r^{(0)}$  и  $v_z^{(0)}$  ще считаме компоненти на движението на потенциално идеално флуидно течение и следователно съществува потенциална функция  $\varphi$ , такава че

$$(9) \quad \begin{aligned} v_r^{(0)} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \\ v_z^{(0)} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Като заместим (8) в (7), получаваме, че  $v_r^{(1)}$  и  $v_z^{(1)}$  удовлетворяват уравнението (7). Полагаме

$$(10) \quad v_r^{(1)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Тъй като по дефиниция  $v_r^{(0)}$  и  $v_z^{(0)}$  удовлетворяват уравнението на идеален флуид, то функцията  $\psi$  трябва да удовлетворява уравненията

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \Delta \psi \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \Delta \psi \right) = 0.$$

От тези две уравнения обаче следва, че функцията  $\psi$  трябва да удовлетворява уравнението

$$(11) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right).$$

Предполагаме, че функциите  $\varphi$  и  $\psi$  имат вида

$$\begin{aligned} \varphi &= \left[ A e^{-k_0(z-h)} + A_1 e^{k_0(z-h)} \right] J_0(k_0 r) e^{\omega t}, \\ \psi &= \left[ B e^{-k(z-h)} + B_1 e^{k(z-h)} \right] r J_1(k_0 r) e^{\omega t}, \end{aligned}$$

където  $J_0(k_0 r)$  и  $J_1(k_0 r)$  са функции на Бесел съответно от нулев и първи ред, а  $A$ ,  $A_1$ ,  $B$  и  $B_1$  са константи. Тъй като при  $z \rightarrow \infty$ ,  $\vec{v} = 0$ , то  $A_1 = 0$  и  $B_1 = 0$ . Следователно

$$(12) \quad \begin{aligned} \varphi &= A e^{-k_0(z-h)} J_0(k_0 r) e^{\omega t}, \\ \psi &= B e^{-k(z-h)} r J_1(k_0 r) e^{\omega t}, \end{aligned}$$

където

$$(13) \quad k = k_0 \sqrt{1 + \frac{\omega}{\nu k_0^2}} \approx \left( 1 + \frac{\omega}{2\nu k_0^2} \right).$$

Компонентите на скоростта  $\hat{v}_r$  и  $\hat{v}_z$  могат да бъдат записани така:

$$(14) \quad \hat{v}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \hat{v}_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Следователно

$$(15) \quad \begin{aligned} \hat{v}_z &= [Ae^{-k_0(z-h)} + Be^{-k(z-h)}] k_0 J_0(k_0 r) e^{\omega t}, \\ \hat{v}_r &= [Ak_0 e^{-k(z-h)} + Bk e^{-k(z-h)}] J_1(k_0 r) e^{\omega t}. \end{aligned}$$

Тогава за хоризонталното и вертикалното отклонение ще имаме

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{Ak_0 + Bk}{\omega} J_1(k_0 r) e^{\omega t}, \\ \zeta &= \frac{Ak_0 + Bk_0}{\omega} J_0(k_0 r) e^{\omega t}. \end{aligned}$$

По този начин за амплитудите на отклоненията  $\xi$  и  $\zeta$  ще имаме съответно

$$\xi_0 = \frac{Ak_0 + Bk}{\omega}, \quad \zeta_0 = \frac{Ak_0 + Bk_0}{\omega}.$$

И така, засега нашето решение съдържа три неизвестни константи  $A$ ,  $B$  и  $\omega$ . Кинематичните гранични условия върху границата на филма имат вида

$$(16) \quad \hat{v}_z = v_z, \quad \hat{v}_r = v_r \quad \text{при } z = h + \zeta.$$

При  $\zeta \ll h$  за разклинящото налягане  $\Pi$  имаме

$$\Pi(2h + 3\zeta) \approx \Pi(2h) + \zeta \frac{d\Pi}{dh},$$

а капилярното налягане, дължащо се на кривината на профила на вълната, е равно на  $\sigma^f \Delta_r \zeta$ , където

$$\sigma^f = \sigma^0 + \frac{1}{2} \int_h^\infty \Pi dh$$

е повърхностното напрежение на филма [12].

Тогава за връзката между нормалните напрежения на границата на филма ще имаме

$$(17) \quad P_{zz} - \hat{P}_{zz} = \sigma^f \Delta_r \zeta + \zeta \frac{d\Pi}{dh}$$

или

$$(18) \quad P_{zz} - \hat{P}_{zz} = -q \zeta_0 J_0(k_0 r) e^{\omega t},$$

където

$$P_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \hat{P}_{zz} = -\hat{p} + 2\hat{\mu} \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial z}, \quad q = k_0^2 \sigma^f - 2\Pi'.$$

Тъй като

$$\left( \hat{p}^{(0)} \right)_{z=h} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=h} = -\rho A \omega J_0(k_0 r) e^{\omega t},$$

то

$$\hat{P}_{zz}\Big|_{z=h} = -\hat{p}\Big|_{z=h} + 2\hat{\mu} \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial z}\Big|_{z=h} = [\omega\rho A - 2\hat{\mu}(Ak_0^2 + Bk_0k)] J_0(k_0r)e^{\omega t}.$$

От друга страна,

$$P_{zz}\Big|_{z=h} = -p\Big|_{z=h} + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}\Big|_{z=h}.$$

За краткост на изложението ще положим

$$(19) \quad p = \beta J_0(k_0r)e^{\omega t},$$

където  $\beta$  е неизвестен коефициент. От уравненията

$$(20) \quad \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

следва

$$\mu \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial r} z + C_1(r, t).$$

От  $\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$  следва, че  $C_1(r, t) \equiv 0$ .

Като интегрираме по  $z$  още веднъж, намираме

$$v_r = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z^2 + C_2(r).$$

От това равенство при  $z = h$  получаваме

$$U(r, t) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} h^2 + C_2(r, t).$$

Следователно

$$(21) \quad v_r = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} (z^2 - h^2) + U(r, t).$$

Но

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\beta k_0 J_1(k_0r)e^{\omega t}.$$

Тогава

$$v_r = -\frac{1}{2\mu} (z^2 - h^2) \beta k_0 J_1(k_0r)e^{\omega t} + U(r, t).$$

От уравнението на непрекъснатостта, записано във вида

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

и интегрирано по  $z$  от 0 до  $z$ , намираме

$$(22) \quad v_z = -\frac{1}{2\mu} \left( \frac{z^3}{3} - zh^2 \right) \beta k_0^2 e^{\omega t} J_0(k_0r) + \frac{z}{r} \frac{d}{dr} (rU).$$



От условието

$$(23) \quad (v_z)_{z=h} = (\hat{v}_z)_{z=h}$$

следва, че  $U(r, t)$  удовлетворява диференциалното уравнение

$$\frac{1}{3\mu} h^3 \beta k_0^2 e^{\omega t} J_0(k_0 r) + h \left[ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right] = (A + B) k_0 J_0(k_0 r) e^{\omega t}.$$

Като положим

$$U(r, t) = E \cdot J_1(k_0 r) e^{\omega t},$$

където  $E$  е неизвестна константа, лесно получаваме, че

$$\nabla_r U = k_0 E J_0(k_0 r) e^{\omega t}.$$

От уравнението за  $U(r, t)$  намираме

$$(24) \quad E = \frac{A + B}{h} - \frac{1}{3\mu} h^2 k_0 \beta.$$

Следователно

$$(25) \quad v_z = -\frac{1}{2\mu} \left( \frac{z^3}{3} - z h^2 \right) \beta k_0^2 J_0(k_0 r) e^{\omega t} + z k_0 E J_0(k_0 r) e^{\omega t}.$$

От второто кинематично условие

$$(v_r)_{z=h} = (\hat{v}_r)_{z=h}$$

намираме

$$(26) \quad A k_0 + B k = E.$$

Като използваме (24) и граничното условие (18) за нормалните напрежения, получаваме

$$(27) \quad \left( 1 + \frac{2}{3} k_0^2 h^2 \right) \beta = \frac{2\mu k_0}{h} (A + B) - \omega \rho A + 2\hat{\mu} (A k_0^2 + B k_0 k) + q \frac{A k_0 + B k_0}{\omega}.$$

От уравнението

$$(28) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right)$$

и полагането

$$C = \alpha \operatorname{sh}(lz) J_0(k_0 r) e^{\omega t}$$

намираме съотношението

$$(29) \quad l^2 = k_0^2 + \frac{\omega}{D}.$$

От закона за запазване на веществото на ПАВ върху границата  $z = h$  получаваме

$$(30) \quad \Gamma_0 k_0 E = \alpha \left[ D_s \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial C} \right)^0 k_0^2 \operatorname{ch}(lh) + D l \operatorname{sh}(lh) \right].$$

От граничното условие за тангенциалните напрежения

$$(31) \quad \frac{\partial v_r}{\partial z} - a \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial z} = \frac{1}{W_l} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial C} \right)^0 \frac{\partial C}{\partial r} + \mu_s^* \frac{\partial}{\partial r} (\nabla_r v_r) + (\Lambda^* + G^*) \frac{\partial}{\partial r} (\nabla_r \xi)$$

намираме

$$(32) \quad \hat{\mu} [Ak_0^2 + Bk^2] - \mu \left[ \frac{h}{k} k_0 \beta + h k_0^2 E - \frac{h^3 k_0}{3\mu} \beta \right] \\ = - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial C} \right)^0 \alpha k_0 \operatorname{ch}(lh) - \mu_s^* k_0^2 E - (\Lambda^* + G^*) k_0^2 \frac{kA + Bk}{\omega}$$

Ако изразим константите  $E$ ,  $\beta$  и  $\alpha$  от уравненията (24), (26), (30) чрез константите  $A$  и  $B$ , ще получим две линейни хомогенни уравнения за  $A$  и  $B$ .

Тогава дисперсионното уравнение на търсения вълнов режим на движение ще се получи от анулирането на съответната детерминанта в системата за  $A$  и  $B$ . По този начин намираме, че търсеното уравнение за пенни филми има вида

$$(33) \quad \frac{qh^2 \left( 1 + \frac{h^2 k_0^2}{3} \right)}{\omega - \frac{h^3}{3\mu} k_0^2} + \frac{\Gamma_0 \left( \frac{\partial \sigma}{\partial C} \right)^0 \operatorname{sh}(lh)}{D_s \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial C} \right)^0 k_0^2 \operatorname{sh}(lh) + Dl \operatorname{ch}(lh)} = \mu_s^* + \frac{\Lambda^* + G^*}{\omega} + \mu h.$$

В случая за емулсионни филми дисперсионното уравнение има аналогичен вид.

В анализа, който извършихме дотук, предполагаме, че дебелината на филма  $h$  е постоянна, т. е. не отчитаме влиянието на изтъняването върху вълновото движение и обратно. Те обаче могат да се свържат чрез подходяща квазистационарна процедура, а именно, тъй като  $\zeta$  би зависила от  $t$  само чрез  $h$ , можем да запишем [23]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial h} \frac{dh}{dt},$$

или

$$\omega \cdot \zeta = -V \frac{\partial \zeta}{\partial h}.$$

След като интегрираме това уравнение, получаваме

$$(34) \quad \ln \frac{\zeta(h)}{\zeta(h_t)} = - \int_{h_t}^h \frac{\omega}{V} dh.$$

Тук  $h_t$  е дебелината на прехода към неустойчивост. За да пресметнем  $h_t$ , трябва да използваме

$$(35) \quad q(h_t) = \sigma^f k_0^2 - \left. \frac{d\Pi}{dh} \right|_{h_t} = 0.$$

Така получаваме, че уравнение (34), а следователно и  $h_{cr}$  няма да зависят от всеки фактор, който променя  $V$  и  $\omega$  в равна степен.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Boussinesq, J. — Ann. de Chimie Physique, 291, 1913.
2. Lamb, M. Hydrodynamics, Dover, London, 1945.
3. Godrich, F. — J. Phys. Chem., 66, 1962.
4. Luncassen, M., Van Den Tempel Vrij, Hesselin, F. — Physical Chemistry, 73, 1970.
5. Gemmerman, R. J., Homsey, G. M. — Chem. Eng. Commun., 2, 1975.
6. Jain, R., Ruckenstein, E. — J. Colloid Interface Sci., 54, 1976.
7. Mayer, E., Elissen, J. — J. Colloid Interface Sci., 37, 1971.
8. Fredricson, A. G. Principles and Application of Rheology, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1975.
9. Oldroyd, J. G. — Proc. Roy. Soc., A 232, 1955.
10. Gordner, J. W., Addison, J. V., Schechter, R. S. — AI Ch. E. J., 24, 1979.
11. Ivanov, I. B., Radoev, B., Manev, E., Scheludko, A. — Annuaire de l'universite de Sofia "St. Kl. Ohridski" (Faculte de Chimie), 64, 1969/70.
12. Ivanov, I. B., Jain, R. K., Somasundarau, R., Traykov, T. In "Solution Chemistry of Surfactance", K. L. Mital, ed. vol. 2, 1979.
13. Lord Kelvin — Phyl. Mag., 4, ser. 42, 1971.
14. Weigardt, K. — Physik Z., 44, 1943.
15. Dorrestein, R. — Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc., B., 54, 1951.
16. Levich, V. G. Physicochemical Hydrodynamics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. Y., 1962.
17. Hansen, R., Mann, J. A. — J. Applied Physics, 35, 1964.
18. Van Den Tempel, M., Van Der Riet. — The Journal of Chemical Physics, 43, 1965.
19. Pintar, A. J., Israel, A. B., Wasan, D. T. — J. Colloid Interface Sci., 37, 1971.
20. Scheludko, A. — Adv. Colloid Interface Sci., 1, 1967.
21. Vrij, A. — Discussions Faraday Soc., 42, 1966.
22. Ivanov, I. B., Radoev, B., Manev, E., Scheludko, A. — Trans. Faraday Soc., 60, 1970.
23. Zapryanov, Z., Malhotra, W., Aderangi, N. and Wasan, D., Emulsion Stability: an analysis of the bulk and interfacial properties on film mobility and drainage rate. — Int. J. Multiphase Flow, 9, N2, 1983.

Received 04.02.1993