ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 82, 1988

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ОПЕРАТОРОВ КРАММА-КРЕЙНА К РАЗЛОЖЕНИЯМ ПО ПРОИЗВЕДЕНИЯМ РЕШЕНИЙ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА С ОДИНАКОВЫМИ СПЕКТРАМИ

ЙОРДАН МИШЕВ, ЕВГЕНИ ХРИСТОВ

Йордан Мишев, Евгени Христов. ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ОПЕРАТОРОВ КРАММА-КРЕЙНА К РАЗЛОЖЕНИЯМ ПО ПРОИЗВЕДЕНИЯМ РЕШЕНИЙ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА С ОДИНАКОВЫМИ СПЕКТРАМИ

Рассмотрены формулы разложения по произведениям решений двух уравнений Шредингера на полуоси с нулевым граничным решением, когда дискретные спектры совпадают. Показано, как с помощью пробразований Крамма-Крейна можно построить подобные формулы разложения, когда число собственных значений на единицу больше или меньше.

Jordan Mishew, Evgeni Khristov. ON AN APPLICATION OF THE OPERATORS OF CRUMM-KREIN TO THE DECOMPOSITION IN PRODUCTS OF THE SOLUTIONS OF TWO EQUATIONS OF SHRÖDINGER WITH EQUAL SPECTRA

There are considered expansions over products of solutions of two Schödinger equations on semi-axis with Dirichlet boundary conditions when discrete spectra coincide. We constructed by the Crumm-Krein transformations the analogous formulae for the expansions when there are one more or less eigenvalues.

ВВЕДЕНИЕ

А. Хорошо известна следующая

Т е о р е м а 0.1 [1, 2]. Пусть задано уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}y + (\lambda - v(x))y = 0; \qquad a \leqq x \leqq b \tag{1}$$

и $z(x)$ — решение при $\lambda = \lambda_0$, $z(x) \neq 0$, $a < x < b$. **Тогда функция**

$$y_1(x, \lambda) = \frac{W(z(x), y(x, \lambda))}{(\lambda_0 - \lambda)z(x)} \qquad (W(f, g) = fg' - f'g) \tag{2}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}y_1 + (\lambda - v_1(x))y_1 = 0, \tag{3}$$

где новый потенциал $v_1(x) = v(x) - 2\dfrac{d^2}{dx^2}\ln z(x)$. Обратное к (2) преобраз вание дается формулой

$$y(x, \lambda) = \frac{W(z_1(x), y_1(x, \lambda))}{z_1(x)}, \qquad z_1(x) = z^{-1}(x). \tag{4}$$

Преобразования (2), (4), обычно называемые пробразованиями Кра ма-Крейна, играют важную роль при исследовании прямых и обратнь задач спектрального анализа для оператора Штурма-Лиувилля (1) (с например [3, 4, 5]). Интерес к ним возрос особо в последнее время связи с их приложением к уравнению Кортевега де Фриза (см. наприм [5]). Основной целью настоящей работы является построение оператор преобразования для произведений решений двух операторов Шредингер на полуоси с одинаковым дискретным спектром, и на этой основе пок зать как трансформируются полученные в работе [6] формулы разлож ния. Основным результатом здесь являются доказанные в §3 теорем 3.1–3.4, где показано как исходя из формулы разложения, соответств ющей N собственным числам, можно просто поличить соответствующу формулу для случаев $N \pm 1$ собственных чисел. Отметим, что эти р зультаты, вместе с полученными в [7], позволяют построить простой а горифм построения формул разложения по произведениям решений дву радиальных уравнений Шредингера в случае высших орбитальных моме тов $l = 1, 2, 3, \ldots$, который проще изложенного в [8] директного обобщен [6]. Сходные этой работе построения применялись на конечном интервал в [9]. Основное отличие случая полуоси от случаев конечного интервал или всей оси состоит, как известно [5], в том, что здесь следует применя дважды преобразования Крамма—Крейна для того, чтобы добавить ил уничтожить собственное число, сохраняя обычный для задач рассеяні класс суммируемых вместе с первым моментом потенциалов. Это приводить к некоторым усложнениям по сравнению с [6,9] при построении соответствующих трансформирующих формул, которые изложены в §§1, 2. В введении приведены необходимые для этой работы свойства операторов преобразования Крама — Крейна на полуоси, а также основные формулы разложения и связанные с ними соотношения биортогональности, полученные в [6], в удобной для наших целей форме.

Из теоремы 0.1 вытекает

Т е о р е м а 0.2 [6]. Рассмотрим две уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}y^{(n)} + (\lambda - v^n(x))y^n = 0, \qquad a \leqq x \leqq b, \qquad n = 1, 2,$$

по которым построены уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}y_1^{(n)} + (\lambda - v_1^{(n)}(x)y_1^{(n)} = 0, \qquad v_1^{(n)} = v^{(n)} - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln z^{(n)}, \tag{5}$$

где решения $z^{(n)}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 0.1. Тогда справедливы тождества

$$W(Z(x), Y(x,\lambda)) = (\lambda_0 - \lambda)\frac{d}{dx}(Z(x)Y_1(x,\lambda)), \tag{6}$$

$$W(Z_1(x), Y_1(x,\lambda)) = (\lambda_0 - \lambda)^{-1}\frac{d}{dx}(Z_1(x)Y(x,\lambda)), \tag{7}$$

где обозначили

$$Y(x,\lambda) = y^{(1)}(x,\lambda)y^{(2)}(x,\lambda), \quad Z(x) = z^{(1)}(x)z^{(2)}(x),$$
$$Y_1(x,\lambda) = y_1^{(1)}(x,\lambda)y_1^{(2)}(x,\lambda), \quad Z_1(x) = z_1^{(1)}(x)z_1^{(2)}(x).$$

Доказательство. Имеем тождество [10]

$$W(Y(x,\lambda), Z(x,\mu)) = \frac{1}{\lambda - \mu}\frac{d}{dx}\prod_{n=1,2} W(y^{(n)}(x,\lambda), z^{(n)}(x,\mu)). \tag{8}$$

Из (2) и (4) следует, что

$$Z(x)Y_1(x,\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{-2}\prod_{n=1,2} W(z^{(n)}(x), y^{(n)}(x,\lambda)),$$
$$Z_1(x)Y(x,\lambda) = \prod_{n=1,2} W(z_1^{(n)}(x), y_1^{(n)}(x,\lambda)).$$

Подставляя эти равенства в правую часть (8), при $\mu = \lambda_0$ получаем искомые формулы (6) и (7).

Б. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d^2}{dx^2}y + (k^2 - v(x))y = 0, \qquad 0 < x < \infty, \tag{9}$$

$$y(0,k) = 0, \tag{10}$$

где вещественный потенциал $v(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|v\|_{X_1} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^\infty (1+x)|v(x)|dx \ < \ \infty.$$

Необходимые для работы свойства решений краевой задачи (9), (10), которыми пользуемся в дальнейшем без ссылок, имеются, например, в [3, 4].

Обозначим через $\varphi(x,k)$ и $f(x,k)$ решения уравнения (9), для которых

$$\varphi(0,k) = 0, \qquad \varphi'(0,k) = 1, \tag{11}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x,k)\exp(-ikx) = 1, \qquad \operatorname{Im} k \geqq 0, \tag{12}$$

где штрихом обозначаем дифференцирование по x. Пусть

$$f(v;k) = f(0,k) = W(f(x,k),\varphi(x,k)) \tag{13}$$

функция Йоста краевой задачи (9), (10), а

$$\sigma(v) = \{k_j : \ f(v;k_j) = 0; \qquad k_j = i\tau_j, \qquad \tau_j > 0, \qquad j = 1,\dots,N\}$$

множество нулей функции $f(v;k)$ при $\operatorname{Im} k > 0$, квадраты которых $\lambda_j = (k_j)^2$, $j = 1,2,\dots,N$, определяют собственные числа. Будем предполагать, для краткости изложения, что $f(v;0) \neq 0$.

Пусть $\tau_0 > \max \tau_j$ и обозначим $\varphi(x) \doteq \varphi(x,k_0)$, $k_0 = i\tau_0$. Напомним, что $\varphi(x) \neq 0$, $0 < x < \infty$, и справедливы асимптотики

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x(1+o(1)), & x \to 0, \\ \varphi(x) &= Ce^{\tau_0 x}(1+o(1)), & x \to \infty, \end{aligned} \tag{14}$$

допускающие дифференцирование по x.

Здесь и всюду в дальнейшем через C и C_1 и т.д. будем обозначать различные постоянные, не зависящие от x и k.

Сделаем, следуя [3], преобразования

$$y_1(x,k) = \frac{W(\varphi(x),y(x,k))}{(k_0^2-k^2)\varphi(x)}, \qquad y_2(x,k) = \frac{W(h_1(x),y_1(x,k))}{h_1(x)}, \tag{15}$$

где

$$h_1(x) = \frac{I(\alpha;x)}{\varphi(x)}, \qquad I(\alpha;x) = 1 + \alpha\int\limits_0^x \varphi^2(s)ds, \qquad \alpha > 0. \tag{16}$$

Справедлива следующая

Теорема 0.3 [3]. Функция

$$y_2(x,k) = y(x,k) - \frac{\alpha\varphi(x)W(\varphi(x), y(x,k))}{(k_0^2 - k^2)I(\alpha;x)}, \tag{17}$$

которая получается суперпозицией преобразований (15), удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}y_2 + (k^2 - v_2(x))y_2 = 0, \qquad 0 < x < \infty, \tag{18}$$

где потенциал

$$v_2(x) = v(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln I(\alpha;x) \ \in X_1.$$

При этом функция $\varphi_2(x) = h_1^{-1}(x)$ является собственной функцией граничной задачи (9),(10) и $\int\limits_2^\infty \varphi_2^2(x)dx = \alpha^{-1}$. Обратное к преобразованию (17) дается формулой

$$y(x,k) = y_2(x,k) + \frac{\alpha\varphi_2(x)W(\varphi_2(x), y_2(x,k))}{(k_0^2 - k^2)I_2(\alpha;k)}.$$

где

$$I_2(\alpha;x) = \alpha\int\limits_x^\infty \varphi(s)ds = I^{-1}(\alpha;x).$$

Тогда $y(x,k)$ удовлетворяет уравнению (9) с потенциалом

$$v(x) = v_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln I_2(\alpha;x)$$

и имеем

$$\varphi(x) = \varphi_2(x)I_2^{-1}(\alpha;x).$$

Замечание 1. Решения $\varphi(x,k)$ и $f(x,k)$ связаны с решениями $\varphi_2(x,k)$ и $f_2(x,k)$ формулами

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x,k) &= \varphi(x,k) - \frac{\alpha\varphi(x)W(\varphi(x), \varphi(x,k))}{(k_0^2 - k^2)I(\alpha;x)}, \\
f_2(x,k) &= \frac{k-k_0}{k+k_0}\left\{f(x,k) - \frac{\alpha\varphi(x)W(\varphi(x), f(x,k))}{(k_0^2 - k^2)I(\alpha;x)}\right\}.
\end{aligned}$$

и, следовательно, функция Йоста

$$f_2(k) = \left(\frac{k-k_0}{k+k_0}\right)f(k).$$

З а м е ч а н и е 2. Функция $y_1(x,k)$ (см. (15)) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}y_1 + (k^2 - v_1(x))y_1 = 0, \qquad v_1 = v - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\varphi(x),$$

где при $a > 0$

$$\int_0^a \left|v_1(x) - \frac{2}{x^2}\right|dx + \int_a^\infty x|v_1(x)|dx < \infty.$$

B. Рассмотрим две краевые задачи вида (9), (10)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}y^{(n)} + (k^2 - v^{(n)}(x))y^{(n)} &= 0, \ 0 < x < \infty, \\ y^{(n)}(0,k) &= 0, \qquad n = 1,2; \end{aligned} \tag{19}$$

для которых дискретные спектры совпадают, т. е.

$$v^{(n)} \in \Omega(N) \stackrel{\text{def}}{=} \{v^{(n)} \in X_1, \qquad n = 1,2:$$

$$\sigma(v^{(1)}) = \sigma(v^{(2)})\}, \qquad \sigma(v^{(n)}) = \{k_j, \ j = 1,2,\dots,N\}, \ n = 1,2.$$

Положим

$$\Phi(x,k) = \varphi^{(1)}(x,k)\varphi^{(2)}(x,k), \ F(x,k) = f^{(1)}(x,k)f^{(2)}(x,k),$$

где $\varphi^{(n)}(x,k)$ и $f^{(n)}(x,k)$ — решения уравнений (19), удовлетворяющих условиям (11), (12), и пусть

$$F(k) = f^{(1)}(k)f^{(2)}(k)$$

произведение функций Йоста. Введем, следуя [6], системы функций

$$\begin{aligned} \{\Phi\} &: \ \Phi(x,k), \ k \in (0,\infty) \cup \sigma; \ \dot{\Phi}(x,k_j) = \frac{\partial}{\partial k}\Phi(x,k)|_{k=k_j}, \ k_j \in \sigma, \\ \{F\} &: \ F(x,k), \ k \in (0,\infty) \cup \sigma; \ \dot{F}(x,k) = \frac{\partial}{\partial k}F(x,k)|_{k=k_j}, \ k_j \in \sigma, \end{aligned} \tag{20}$$

где точкой обозначаем дифференцирование по k, а $\sigma = \sigma(v^{(1)}) = \sigma(v^{(2)})$.

Построим систему функций $\{\tilde{F}\}$ следующим образом:

$$\tilde{F}(x,k) = -\frac{4}{\pi}k \ \mathrm{Im}\left\{\frac{F(x,k)}{F(k)}\right\}, \ k \in (0,\infty), \tag{21}$$

а каждому $k_j \in \sigma$ сопоставим пару функций

$$\tilde{F}_{j,1}(x) = b_j(\dot{F}(x,k_j) + d_jF(x,k_j)); \ \tilde{F}_{j,2}(x) = b_jF(x,k_j), \tag{22}$$

где

$$b_j = 8k_j\ddot{F}^{-1}(k_j), \qquad d_j = \frac{1}{k_j} - \frac{\dddot{F}(k_j)}{3\ddot{F}(k_j)}.$$

Отметим, что

$$\tilde{F}(x,k) = -\frac{2}{\pi}\frac{k^2}{|F(k)|^2}\sum_{n=1,2}\varphi^{(n)}(x,k)\theta^{(3-n)}(x,k),$$

где

$$\theta^{(n)}(x,k) = f^{(n)}(x,k)f^{(n)}(-k) + f^{(n)}(x,-k)f^{(n)}(k)$$

и следовательно

$$\tilde{F}(0,k) = 0,\ \ \tilde{F}'(0,k) = -\frac{4}{\pi}\left\{\frac{k^2}{|f^{(1)}(k)|^2} + \frac{k^2}{|f^{(2)}(k)|^2}\right\}.$$

Справедлива следующая

Т е о р е м а 0.4 [6]. Пусть заданы две краевые задачи (19), где $v^{(n)} \in \Omega(N)$, $n = 1,2$, и по ним построены указанным выше способом системы $\{\Phi\}$ и $\{\tilde{F}\}$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $h(x) \in X_1$ справедливы формулы разложения

$$h(x) = -\int_0^\infty \tilde{F}(x,k)(h,\Phi'(k))dk - \sum_{j=1}^{N}\{\tilde{F}_{j,1}(x)(h,\Phi'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}(x)(h,\dot{\Phi}'(k_j))\}, \tag{23}$$

$$h(x) = -\int_0^\infty \Phi'(x,k)(h,\tilde{F}(k))dk - \sum_{j=1}^{N}\{\Phi'(x,k_j)(h,\tilde{F}_{j,2}) + \dot{\Phi}'(x,k_j)(h,\tilde{F}_{j,1})\}, \tag{24}$$

где коэффициенты разложения

$$(h,\Phi'(k)) = \int_0^\infty h(x)\Phi'(x,k)dx, \qquad k \in (0,\infty)\cup\sigma,$$

$$(h,\tilde{F}(k)) = \int_0^\infty h(x)\tilde{F}(x,k)dx, \qquad k \in (0,\infty),$$

$$(h,\dot{\Phi}'(k_j)) = \int_0^\infty h(x)\dot{\Phi}'(x,k_j)dx, \qquad k_j \in \sigma,$$

$$(h, \tilde{F}_{j,1}) = \int_0^\infty h(x)\tilde{F}_{j,1}(x)dx, \qquad j = 1, \dots, N,$$

$$(h, \tilde{F}_{j,2}) = \int_0^\infty h(x)\tilde{F}_{j,2}(x)dx, \qquad j = 1, \dots, N,$$

являются абсолютно сходящимися интегралами.

Важное место в наших построениях играет

Т е о р е м а 0.5 [6]. Система $\{\Phi\}$ биортогональна системе $\{\tilde{F}\}$ относительно кососкалярного произведения

$$[f, g] = (f, g') = \int_0^\infty f(x)\frac{d}{dx}g(x)dx;$$

точнее, справедливы соотношения

$$[\tilde{F}(k), \Phi(k_j)] = [\tilde{F}(k), \dot{\Phi}(k_j)] = 0, \qquad k \in (0, \infty), \quad k_j \in \sigma,$$

$$[F(k_j), \Phi(k)] = [\dot{F}(k_j), \Phi(k)] = 0, \qquad k \in (0, \infty), \quad k_j \in \sigma,$$

$$[\tilde{F}_{j,1}, \Phi(k_l)] = -[\Phi(k_l), \tilde{F}_{j,1}] = -\delta_{j,l}, \quad j, l = 1, \dots, N,$$

$$[\tilde{F}_{j,2}, \dot{\Phi}(k_l)] = -[\dot{\Phi}(k_l), \tilde{F}_{j,2}] = -\delta_{j,l}, \quad j, l = 1, \dots, N,$$

$$[\tilde{F}_{j,1}, \dot{\Phi}(k_l)] = [\dot{\Phi}(k_l), \tilde{F}_{j,1}] = 0, \qquad j, l = 1, \dots, N,$$

$$[\tilde{F}_{j,2}, \Phi(k_l)] = [\Phi(k_l), \tilde{F}_{j,2}] = 0, \qquad j, l = 1, \dots, N,$$

Для краткости изложения мы всюду предполагаем, что функции f, h и т.д. являются достаточно гладкими для того, чтобы соответствующие интегралы являлись абсолютно сходящимися, и везде, где нужно, можно поменять порядок интегрирования, что будем подразумевать всюду в дальнейшем.

§1. ОПЕРАТОРЫ A, $\tilde{A}$.

Рассмотрим, наряду с (19), краевые задачи

(25) $$\frac{d^2}{dx^2}y_2^{(n)} + (k^2 - v_2^{(n)}(x))y_2^{(n)} = 0, \ 0 < x < \infty,$$

$$y_2^{(n)}(0, k) = 0, \qquad n = 1, 2,$$

которые, как в теореме 0.3, получаются из (19) после двойного преобразования Крама—Крайна и для которых

(26) $$v_2^{(n)}(x) = v^{(n)}(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln I^{(n)}(\alpha_n; x) \in \Omega(N+1),$$

$$I^{(n)}(\alpha_n; x) = 1 + \alpha_n \int_0^x \varphi^{(n)}(s)ds, \varphi^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x, k_0).$$

Отметим, что

$$\sigma(v_2^{(n)}) = \sigma(v^{(n)}) \cup \{k_0\}; \qquad \int_0^\infty (\varphi_2^{(n)}(x))^2 dx = \alpha_n^{-1}.$$

Обозначим

$$(27) \quad Z_1(x) = \Phi^{-1}(x, k_0),$$

$$(28) \quad Z_2(x) = (h_1^{(1)}(x) h_1^{(2)}(x))^{-1} = \Phi(x, k_0)(I^{(1)}(\alpha_1; x)(I^{(2)}(\alpha_2; x))^{-1}.$$

Справедливы асимптотики

$$(29) \quad Z_1(x) = x^{-2}(1+o(1)),\ x \to 0;\ Z_1(x) = C_1 e^{-2\tau_0 x}(1+o(1)),\ x \to \infty,$$

$$(30) \quad Z_2(x) = x^2(1+o(1)),\ x \to 0;\ Z_2(x) = C_2 e^{-2\tau_0 x}(1+o(1)),\ x \to \infty,$$

которые допускают дифференцирование по x.

Рассмотрим в пространствах $L_1 = L_1(0,\infty)$, $L_\infty = L_\infty(0,\infty)$ операторы

$$A_1 f = f(x) + 2Z_1^{-1}(x) \int_x^\infty Z_1'(s) f(s) ds,$$

$$A_2^{(\infty)} f = f(x) + 2Z_2^{-1}(x) \int_x^\infty Z_2'(s) f(s) ds,$$

$$A_2^{(0)} f = f(x) - 2Z_2^{-1}(x) \int_0^x Z_2'(s) f(s) ds.$$

Очевидна следующая

Л е м м а 1.1. Условие

$$(31) \qquad (f, Z_2') = 0$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы

$$(32) \qquad A_2^{(\infty)} = A_2^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} A_2.$$

Обозначим через

$$L_{1(\infty)}(Z_2') = \{f \in L_1(L_\infty) : (f, Z_2') = 0\}$$

подпространство функций $f \in L_{1(\infty)}$, удовлетворяющих условию (31). С помощью оценок (29), (30) устанавливается следующая

Л е м м а 1.2. Операторы

$$A_1 \in \mathcal{L}(L_1, L_1), (\mathcal{L}(L_\infty, L_\infty)),$$

$$A_2 \in \mathcal{L}(L_1(Z_2'), L_1), (\mathcal{L}(L_\infty(Z_2'), L_\infty))$$

и, следовательно, оператор

$$A = A_1 A_2 \in \mathcal{L}(L_1(Z_2'), L_1), (\mathcal{L}(L_\infty Z_2'), L_\infty)),$$

где, как обычно, $\mathcal{L}(X, Y)$ — пространство ограниченных операторов, оп ределенных в X со значениями в Y. Далее введем операторы

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_1 f &= f(x) - 2(Z_1^{-1}(x))' \int_x^\infty Z_1(s) f(s) ds \\
\tilde{A}_2^{(\infty)} f &= f(x) - 2(Z_2^{-1}(x))' \int_x^\infty Z_2(s) f(s) ds \\
\tilde{A}_2^0 f &= f(x) + 2(Z_2^{-1}(x))' \int_0^x Z_2(s) f(s) ds
\end{aligned}$$

Отметим, что если $f'(x) \in L_1(L_\infty)$, то

(33) $$DA_1 f = \tilde{A}_1 Df, \; DA_2^{(0)(\infty)} f = \tilde{A}_2^{(0)(\infty)} Df, \; D = \frac{d}{dx}.$$

Для операторов $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2^{(\infty)}$ и $\tilde{A}_2^{(0)}$ справедлива

Л е м м а 1.3. Пусть

$$L_{1(\infty)}(Z_2) = \{f \in L_{1(\infty)} : \quad (f, Z_2) = 0\}.$$

Тогда условие $f \in L_{1(\infty)}(Z_2)$ является ноебходимым и достаточным дл того, чтобы

(34) $$\tilde{A}_2^{(0)} = \tilde{A}_2^{(\infty)} = \tilde{A}_2 \in \mathcal{L}(L_1(Z_2), L_1), (\mathcal{L}(L_\infty(Z_2), L_\infty)).$$

При этом оператор

$$\tilde{A} = \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \in \mathcal{L}(L_1(Z_2), L_1), (\mathcal{L}(L_\infty(Z_2), L_\infty)),$$

где

$$\tilde{A}_1 \in \mathcal{L}(L_1, L_2), (\mathcal{L}(L_\infty, L_\infty)).$$

З а м е ч а н и е 1. Очевидно,

(35) $$A_2 Z_2 = \tilde{A}_2 Z_2' = 0,$$

$$A Z_2(x) = 0, \qquad \tilde{A} Z_2'(x) = 0,$$

т.е. $Z_2(x)$ и $Z_2'(x)$ являются функциями из ядер операторов A и $\tilde{A}$ соотве ственно. Лемма 1.1 показывает, что требование ортогональности функц

$f(x)$ функцией $Z_2'(x)$ из ядра операторов $\tilde{A}$, т.е. $f \in L_{1(\infty)}(Z_2')$, обеспечивает ограниченность оператора A в $L_{1(\infty)}(Z_2')$, а лемма 1.2 показывает, что условие $f \in L_{1(\infty)}(Z_2)$ дает ограниченность оператора $\tilde{A}$ в $L_{1(\infty)}(Z_2)$.

З а м е ч а н и е 2. Обозначим через $P(Z_2')$ оператор проектирования из $L_{1(\infty)}$ в $L_{1(\infty)}(Z_2')$:

$$P(Z_2')f = g, \qquad f \in L_{1(\infty)}, \qquad g \in L_{1(\infty)}(Z_2').$$

Из соотношения биортогональности (см. теорему 0.5) следует

$$f(x) = g(x) - \tilde{F}_{1,1}^{(2)}(x)(f, Z_2'), \qquad \forall f \in L_{1(\infty)},\ g \in L_{1(\infty)}(Z_2'),$$

$$f(x) = g(x) + \dot{\Phi}_2(x, k_0)(f, \tilde{F}_{1,2}^{(2)}), \qquad \forall f \in L_{1(\infty)},\ g \in L_{1(\infty)}(Z_2'). \tag{36}$$

Аналогично, если $P(Z_2)$ — проектирование в $L_{1(\infty)}(Z_2)$:

$$P(Z_2)f = g, \qquad \forall f \in L_{1(\infty)}, \qquad g \in L_{1(\infty)}(Z_2),$$

то имеем

$$f(x) = g(x) + \tilde{F}_{1,1}^{(2)}(x)(f, Z_2), \qquad \forall f \in L_{1(\infty)},\ g \in L_{1(\infty)}(Z_2),$$

$$f(x) = g(x) - \dot{\Phi}_2'(x, k_0)(f, \tilde{F}_{1,2}^{(2)}), \qquad \forall f \in L_\infty,\ g \in L_\infty(Z_2). \tag{37}$$

Здесь функции $\dot{\Phi}_2(x, k_0)$, $\tilde{F}_{1,1}^{(2)}(x)$, $\tilde{F}_{1,2}^{(2)}(x)$ связаны с граничными задачами (25) и определяются как в (20), (22). Операторы $P(Z_2)$ и $P(Z_2')$ являются операторами косоортогонального проектирования и могут быть неограниченными. Отметим, что так как $\dot{\Phi}_2(x, k_0) \in L_\infty$, а $\dot{\Phi}_2'(x, k_0) \in L_\infty \cap L_1$, то формула (36) иммет место лишь для $f \in L_\infty$, а формула (37) остается справедливой и для $f \in L_1$.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Т е о р е м а 1.1. Пусть функции $\Phi(x, k)$, $\dot{\Phi}(x, k_j)$, $\tilde{F}(x, k)$ и $\tilde{F}_{j,m}(x)$ построены по формулам (20), (21) и (22), а функции $\Phi_2(x, k)$, $\dot{\Phi}_2(x, k_j)$, $\tilde{F}_2(x, k)$ и $\tilde{F}_{j,m}^{(2)}(x)$ по тем же формулам для уравнений (25), где $v_2^{(n)}(x)$ определяются из (26). Тогда

$$\Phi(x, k) = A\Phi_2(x, k), \qquad \Phi'(x, k) = \tilde{A}\Phi_2'(x, k),\ k \in (0, \infty) \cup \sigma, \tag{38}$$

$$\tilde{F}(x, k) = A\tilde{F}_2(x, k), \tilde{F}'(x, k) = \tilde{A}F_2'(x, k),\ k \in (0, \infty) \cup \sigma, \tag{39}$$

$$F(x, k) = \left(\frac{k_0 + k}{k_0 - k}\right)^2 A_1 A_2^{(\infty)} F_2(x, k), \tag{40}$$

$$F'(x, k) = \left(\frac{k_0 + k}{k_0 - k}\right)^2 \tilde{A}_1 \tilde{A}_2^{(\infty)} F_2'(x, k). \tag{41}$$

При этом для $k_j \in \sigma$

$$\tilde{F}_{j,2}(x) = A\tilde{F}^{(2)}_{j,2}(x), \tag{42}$$

$$\tilde{F}'_{j,2}(x) = \tilde{A}\tilde{F}^{(2)'}_{j,2}(x), \tag{43}$$

$$\tilde{F}_{j,1}(x) = A\tilde{F}^{(2)}_{j,1}(x), \tag{44}$$

$$\tilde{F}'_{j,1}(x) = \tilde{A}\tilde{F}^{(2)'}_{j,1}(x), \tag{45}$$

$$\dot{\Phi}(x,k_j) = A\dot{\Phi}_2(x,k_j),\ \dot{\Phi}'(x,k_j) = \tilde{A}\dot{\Phi}'_2(x,k_j), \tag{46}$$

где функции $\tilde{F}_{j,1}(x)$, $\tilde{F}_{j,2}(x)$, $\tilde{F}^{(2)}_{j,1}(x)$, $\tilde{F}^{(2)}_{j,2}(x)$ даются формулами (22) соответственно для краевых задач (19) и (25).

Доказательство. В силу теоремы 0.1 обратные преобразованиям (15) являются преобразования

$$\varphi^{(n)}(x,k) = \frac{W(z_1^{(n)}(x), \varphi_1^{(n)}(x,k))}{z_1^{(n)}(x)}, \qquad z_1^{(n)}(x) = (\varphi^{(n)}(x))^{-1}, \tag{47}$$

$$\varphi_1^{(n)}(x,k) = \frac{W(z_2^{(n)}(x), \varphi_2^{(n)}(x,k))}{(k_0^2-k^2)z_2^{(n)}(x)}, \qquad z_2^{(n)}(x) = (h_1^{(n)}(x))^{-1}. \tag{48}$$

Отсюда, в силу теоремы 0.2, получаем тождества

$$W(Z_1(x), \Phi_1(x,k)) = (k_0^2-k^2)^{-1}\frac{d}{dx}(Z_1(x)\Phi(x,k)), \tag{49}$$

$$W(Z_2(x), \Phi_2(x,k)) = (k_0^2-k^2)\frac{d}{dx}(Z_2(x)\Phi_1(x,k)), \tag{50}$$

где функции $Z_1(x), Z_2(x)$ определяются формулами (27), (28), а

$$\Phi_1(x,k) = \varphi_1^{(1)}(x,k)\varphi_1^{(2)}(x,k),$$

где $\varphi_1^{(n)}(x,k)$ — решение уравнения (5). Интегрируя (49) и (50) от x до ∞ с учетом асимптотик (29), (30), получаем

$$\Phi(x,k) = (k_0^2-k^2)A_1\Phi_1(x,k), \qquad k \in (0,\infty)\cup\sigma,$$

$$\Phi_1(x,k) = (k_0^2-k^2)^{-1}A_2^{(\infty)}\Phi_2(x,k), \qquad k \in (0,\infty)\cup\sigma.$$

Следовательно,

$$\Phi(x,k) = A_1A_2^{(\infty)}\Phi_2(x,k), \qquad k \in (0,\infty)\cup\sigma, \tag{51}$$

что, с учетом равенств $(Z'_2, \Phi_2(k)) = 0$ и $(Z'_2, \Phi_2(k_j)) = 0$, дает первую из формул в (38). Вторая вытекает отсюда вследствии равенств (33). Равенства (44) получаются из (51) дифференцированием по k, принимая во внимание, что это равенство имеет место при $\operatorname{Im} k < \tau_0$ и далее, учитывая соотношения $(Z_2, \Phi_2(k_j)) = 0$. Заметим, что из (14) следует, что аналоги формул (47),(48) для решений Йоста являются преобразования

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x,k) &= \frac{i\, W(z_1^{(n)}(x), f_1^{(n)}(x,k))}{W(k_0-k) z_1^{(n)}(x)},\\
f_1^{(n)}(x,k) &= \frac{i\, W(z_2^{(n)}(x), f_2^{(n)}(x,k))}{W(k_0-k) z_2^{(n)}(x)},
\end{aligned}
$$

и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
W(Z_1(x), F_1(x,k)) &= \left(\frac{k-k_0}{k+k_0}\right) \frac{d}{dx}(Z_1(x)F(x,k)),\\
W(Z_2(x), F_2(x,k)) &= \left(\frac{k-k_0}{k+k_0}\right) \frac{d}{dx}(Z_1(x)F_1(x,k)),
\end{aligned}
$$

где $F_1(x,k) = f_1^{(1)}(x,k) f_1^{(2)}(x,k)$. Отсюда формула (40) выводится по изложенной выше схеме доказательства формулы (51). Формула (41) следует непосредственно из равенств (33). Представления (39) следуют из (40), (41) в силу равенства

$$
F_2(k) = \left(\frac{k-k_0}{k+k_0}\right)^2 F(k) \tag{52}
$$

и соотношения биортогональности $((Z_2', \tilde{F}_2(k)) = (Z_2, \tilde{F}_2'(k)) = 0)$. Равенства (45) и (46) получаются дифференцированием по k равенства (40), (41) и учитывая, что при $k_j \in \sigma$ справедливы соотношения биортогональности $(Z_2, F_2'(k_j) = (Z_2, \dot{F}_2'(k_j)) = 0$. Из (52) следует, что

$$
b_j^{(2)} = \left(\frac{k_j+k_0}{k_j-k_0}\right)^2 b_j, \qquad d_j^{(2)} = d_j + \frac{4k_0}{k_0^2 - k_j^2}.
$$

Отсюда, в силу

$$
\begin{aligned}
&(53) \quad & F(x,k_j) &= \left(\frac{k_0+k_j}{k_0-k_j}\right)^2 AF_2(x,k_j),\\
&(54) \quad & \dot{F}(x,k_j) &= 4k_0 \frac{k_0+k_j}{(k_0-k_j)^3} AF_2(x,k_j) + \left(\frac{k_0+k_j}{k_0-k_j}\right)^2 A\dot{F}_2(x,k_j),
\end{aligned}
$$

получаем (42)–(45). Теорема доказана.

§2. ОПЕРАТОРИ $B^{(a)}$, $\tilde{B}^{(a)}$.

В этом параграфе мы построим операторы, обратные преобразованиям из теоремы 1.1. В основе наших построений важную роль играет следующая

Л е м м а 2.1. Эсли функция $Z(x) \neq 0$, то общее решение уравнения

$$h(x) - 2Z^{-1}(x)\int\limits_a^x Z'(s)h(s)ds = f(x) \tag{55}$$

дается формулой

$$h(x) = CZ(x) + f(x) - 2Z(x)\int\limits_b^x (Z^{-1}(s))'f(s)ds, \tag{56}$$

а общее решение уравнения

$$h(x) + 2Z'(x)\int\limits_a^x (Z^{-1}(s))h(s)ds = f(x) \tag{57}$$

дается формулой

$$h(x) = C(Z^{-1}(x))' + f(x) + 2(Z^{-1}(x))'\int\limits_b^x Z(s)f(s)ds, \tag{58}$$

где C, a, b — произвольные постоянные.

Доказательство. Напомним, что для общего решения уравнения

$$y' + f(x)y = g(x).$$

имеем формулу

$$y(x) = \exp(-F(x))\left[\eta + \int\limits_\xi^x g(s)\exp(F(s))ds\right], \tag{59}$$

где $F(x) = \int\limits_\xi^x f(s)ds$; η, ξ — произвольные постоянные. Положим $y(x) = \int\limits_a^x Z'(s)h(s)ds$. Уравнение (55) принимает вид

$$y' + (-2Z'(x)Z^{-1}(x))y = Z'(x)f(x). \tag{60}$$

Отсюда, в силу (59), получаем

$$y(x) = CZ^2(x) - Z^2(x) \int\limits_b^x (Z^{-1}(s))' f(s) ds,$$

что вместе с равенством $y' = Z'h$ дает (56). Аналогичным образом устанавливается и формула (59). Лемма доказана.

Введем теперь в пространство $L_{1(\infty)}$ операторы

$$
\begin{aligned}
B_1 h &= h(x) - 2Z_1(x) \int\limits_0^x (Z_1^{-1}(s))' h(s) ds, \\
B_2^{(a)} h &= h(x) - 2Z_2(x) \int\limits_a^x (Z_2^{-1}(s))' h(s) ds,
\end{aligned}
\tag{61}
$$

где

$$Z_2(x) = \Phi_2(x, k_0), \qquad Z_1(x) = \alpha_1 \alpha_2 \Phi_2^{-1}(x, k_0) I_2^{(1)}(x) I_2^{(2)}(x). \tag{62}$$

Нам понадобятся еще операторы

$$
\begin{aligned}
\tilde{B}_1 h &= h(x) + 2Z_1'(x) \int\limits_0^x Z_1^{-1}(s) h(s) ds, \\
\tilde{B}_2^{(a)} h &= h(x) + 2Z_2'(x) \int\limits_a^x Z_2^{-1}(s) h(s) ds,
\end{aligned}
\tag{63}
$$

которые связаны с B_1 и $B_2^{(a)}$ при $h' \in L_{1(\infty)}$ равенствами

$$DB_1 h = \tilde{B}_1 Dh, \qquad DB_2^{(a)} h = \tilde{B}_2^{(a)} Dh.$$

Л е м м а 2.1. При любом $a > 0$ операторы

$$B_1, \tilde{B}_1, B_2^{(a)}, \tilde{B}_2^{(a)} \in \mathcal{L}(L_1, L_1), (\mathcal{L}(L_\infty, L_\infty)) \tag{64}$$

и, если обозначим

$$
\left\{
\begin{aligned}
Z_{2,(0,a)}(x) &= \begin{cases} 2Z_2^{-2}(a) Z_2(x), & 0 \leqq x < a \\ 0, & a \leqq x < \infty \end{cases} \\
Z'_{2,(0,a)}(x) &= \begin{cases} 2Z_2^{-2}(a) Z_2'(x), & 0 \leqq x < a \\ 0, & a \leqq x < \infty, \end{cases}
\end{aligned}
\right.
\tag{65}
$$

$$
(66) \qquad \begin{cases} Z'_{2,(a,\infty)}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq x < a \\ -2Z_2^{-2}(a)Z_2(x), & a \leqq x < \infty, \end{cases} \\ Z'_{2,(a,\infty)}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq x < a \\ -2Z_2^{-2}(a)Z_2'(x), & a \leqq x < \infty, \end{cases} \end{cases}
$$

то для любой $h \in L_{1(\infty)}$ имеем

$$
(67) \qquad (B_2^{(a)}h, Z'_{2,(0,a)}) = (B_2^{(a)}h, Z'_{2,(a,\infty)}) = 0,
$$

$$
(68) \qquad (\tilde{B}_2^{(a)}h, Z'_{2,(0,a)}) = (\tilde{B}_2^{(a)}h, Z_{2,(a,\infty)}) = 0
$$

и, следовательно,

$$
(69) \qquad (B_2^{(a)}h, Z_2') = (\tilde{B}_2^{(a)}h, Z_2) = 0.
$$

Доказательство. Соотношения (64) следуют стандартным образом из оценок (29), (30) и равенств (62). Равенства (67) и (68) проверяются, непосредственно исходя из определения операторов $B_2^{(a)}$, $\tilde{B}_2^{(a)}$. Действительно, обозначив $C_a = 2Z_2^{-2}(a)$, из (63) имеем

$$
C_a \int_a^\infty h(x)Z_2(x)dx + 2C_a \int_a^\infty Z_2(x)Z_2'(x)(\int_a^x Z_2^{-1}(s)h(s)ds)dx
$$

$$
= C_a Z_2^2(x) \int_a^x Z_2^{-1}(s)h(s)ds \Bigg|_{x=a}^{x=\infty} = 0.
$$

Лемма доказана.

Л е м м а 2.2. Для любых $f \in L_{1(\infty)}$, $g \in L_{1(\infty)}$ имеем

$$
(A_1 f, h) = (f, \tilde{B}_1 h), \qquad (\tilde{A}_1 f, h) = (f, B_1 h),
$$

а для операторов A_2 и $\tilde{A}_2$:

$$
\begin{aligned}
(B_2^{(a)}h, f) &= (h, \tilde{A}_2 f), \qquad h \in L_1, \ f \in L_1(Z_2), \\
(\tilde{B}_2^{(a)}h, f) &= (h, A_2 f), \qquad h \in L_1, \ f \in L_1(Z_2').
\end{aligned}
$$

Доказательство. Первое равенство получается непосредственно из определения операторов A_1, $\tilde{A}_1$, B_1, $\tilde{B}_1$ с учетом их ограниченности. Далее имеем

$$
\int_0^\infty Z_2'(x) \left(\int_a^x Z_2^{-1}(s)h(s)ds \right) f(x)dx
$$

$$= \left(\int_0^a + \int_a^\infty\right) \left(Z_2'(x) \left(\int_a^x Z_2^{-1}(s)h(s)ds\right) f(x)dx\right)$$

$$= \int_0^a h(x)Z_2^{-1}(x) \left(\int_0^x Z_2'(s)f(s)ds\right) dx + \int_a^\infty h(x)Z_2^{-1}(x) \left(\int_x^\infty Z_2'(s)f(s)ds\right) dx,$$

что, вместе с условием $(f, Z_2') = 0$, дает второе равенство. Аналогичным образом доказывается и третье. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. Введем операторы

$$B^{(a)} = B_2^{(a)} B_1, \qquad \tilde{B}^{(a)} = \tilde{B}_2^{(a)} B_1. \tag{70}$$

Справедливы равенства

$$(B^{(a)}, h, f) = (h, \tilde{A}f), \ h \in L_1, \ f \in L_1(Z_2), \tag{71}$$

$$(\tilde{B}^{(a)}, h, f) = (h, Af), \ h \in L_1, \ f \in L_1(Z_2'), \tag{72}$$

т.е. на подпространствах $L_{1(\infty)}(Z_2)$ и $L_{1(\infty)}(Z_2')$ сопряжены операторы

$$B^{(a)*} = \tilde{A}; \qquad \tilde{B}^{(a)*} = A. \tag{73}$$

З а м е ч а н и е 1. Положим в (71) $f = Z_2'$. Тогда из (35) и (69) получаем, что

$$(B^{(a)}h, Z_2') = (h, \tilde{A}Z_2') = 0, \tag{74}$$

т.е. нулевое подпространство оператора $\tilde{A}$, которое определяется элементом Z_2' ортогонально области значения оператора $B^{(a)}$, что, с учетом (73), является известным фактом.

З а м е ч а н и е 2. На всем пространстве L_1 оператор

$$B_2^{(a)*} f = f(x) + \begin{cases} 2(Z_2^{-1}(x))' \int\limits_0^x Z_2(s)f(s)ds\ , & 0 < x < a \\ -2(Z_2^{-1}(x))' \int\limits_x^\infty Z_2(s)f(s)ds\ , & a < x < \infty. \end{cases}$$

Из (65) и (66) имеем

$$B_2^{(a)*} Z'_{2,(0,a)}(x) = B_2^{(a)*} Z'_{2,(a,\infty)}(x) = 0,$$

как и должно быть в силу (67).

Основным утверждением в этом параграфе является

Т е о р е м а 2.1. Общее решение уравнения

$$Ag = h, \qquad h \in L_{1(\infty)}, \tag{75}$$

в подпространстве $L_1(Z_2'), (L_\infty(Z_2'))$ дается формулой

$$g(x) = C_a(g)Z_2(x) + B^{(a)}h, \tag{76}$$

где

$$C_a(g) = (g, Z'_{2,(0,a)}) = (g, Z'_{2,(a,\infty)}), \tag{77}$$

а общее решение уравнения

$$\tilde{A}g = h, \qquad h \in L_{1(\infty)}$$

в подпространстве $L_1(Z_2)(L_\infty(Z_2))$ дается формулой

$$g(x) = \tilde{C}_a(g)Z_2'(x) + \tilde{B}^{(a)}h,$$

где

$$\tilde{C}_a(g) = (g, Z_{2,(0,a)}) = (g, Z_{2,(a,\infty)}).$$

При этом

$$AB^{(a)}h = h \ , \tilde{A}\tilde{B}^{(a)}h = h \ , h \in L_{1(\infty)}. \tag{78}$$

Доказательство. Обозначим

$$A_2 g = g_1. \tag{79}$$

Тогда уравнение (75) принимает следующий вид:

$$A_1 g_1 = h. \tag{80}$$

Положим в (55) $a = \infty$, $Z = Z_1$, $h = g_1$, $f = h$. Тогда, в силу определения (60) оператора B_1, получаем из (56), что общее решение уравнения (79) дается формулой

$$g_1(x) = C_1 Z_1(x) + B_1 h.$$

Так как решение g ищем в пространстве $L_{1(\infty)}(Z_2')$, а $A_2 \in \mathcal{L}(L_{1(\infty)}(Z_2'), L_{1(\infty)})$, то из (79) имеем $g_1 \in L_{1(\infty)}$. Отсюда, учитывая, что $B_1 h \in L_{1(\infty)}$ при $h \in L_{1(\infty)}$, а $Z_1 \notin L_{1(\infty)}$, получаем $C_1 = 0$, т.е. единственное решение уравнения (80) дается формулой

$$g_1(x) = b_1 h. \tag{81}$$

Положим теперь в (55) $a = \infty$, $Z = Z_2$, $h = g$, $f = g_1$. Тогда из определения (61) оператора $B_2^{(a)}$ получаем, в силу формулы (56), что общим решением уравнения (79), где g_1 определено в (81), является функция

$$g(x) = CZ_2(x) + B^{(a)}h.$$

Выражения (77) для C получаем с учетом (67), умножив скалярно обе стороны на $Z'_{2,(0,a)}(x)$, $Z'_{2,(a,\infty)}$, так как $(Z_2, Z'_{2,(0,a)}) = 1$, $(Z_2, Z'_{2,(a,\infty)}) = 1$. Аналогичным образом решается уравнение $\tilde{A}g = h$ в подпространстве $L_{1(\infty)}(Z_2)$. Теорема доказана.

Применяя эту теорему к формулам, полученным в теореме 1.1, получаем обратные преобразования. Точнее, справедлива

Т е о р е м а 2.2. Пусть системы $\{\Phi\}$, $\{\tilde{F}\}$ и $\{\Phi_2\}$, $\{\tilde{F}_2\}$ построены, как в теореме 1.1, по уравнениям (19) и (25), где потенциалы $v_2^{(n)}(x)$ определяются равенствами (26). Тогда имеем

$$
\begin{aligned}
\Phi_2(x,k) &= B^{(a)}\Phi(x,k) + C_a(\Phi_2(k))Z_2(x), \ k \in (0,\infty)\cup\sigma,\\
\dot{\Phi}_2(x,k_j) &= B^{(a)}\dot{\Phi}(x,k_j) + C_a(\dot{\Phi}_2(k_j))Z_2(x), \ k_j \in \sigma,\\
\tilde{F}_2(x,k) &= B^{(a)}F(x,k) + C_a(\tilde{F}_2(k))Z_2(x), \ k \in (0,\infty),\\
\tilde{F}^{(2)}_{j,m}(x) &= B^{(a)}\tilde{F}_{j,m}(x) + C_a(\tilde{F}^{(2)}_{j,m})Z_2(x), \ k_j \in \sigma, \ m = 1,2,\\
\Phi'_2(x,k) &= \tilde{B}^{(a)}\Phi'(x,k) + \tilde{C}_a(\Phi'_2(k))Z'_2(x), \ k \in (0,\infty)\cup\sigma,\\
\dot{\Phi}'_2(x,k_j) &= \tilde{B}^{(a)}\dot{\Phi}'(x,k_j) + \tilde{C}_a(\dot{\Phi}'_2(k_j))Z'_2(x), \ k_j \in \sigma,\\
\tilde{F}'_2(x,k) &= \tilde{B}^{(a)}\tilde{F}'(x,k) + \tilde{C}_a(\tilde{F}'_2(k))Z'_2(x), \ k \in (0,\infty),\\
\tilde{F}^{(2)\prime}_{j,m}(x) &= \tilde{B}^{(a)}\tilde{F}'_{j,m}(x) + \tilde{C}_a(\tilde{F}^{(2)\prime}_{j,m})Z'_2(x), \ k_j \in \sigma, \ m = 1,2.
\end{aligned}
$$

§3. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАЗЛОЖЕНИЙ (23) И (24)

В этом параграфе покажем как, исходя из разложений (23) и (24) с $v^{(n)} \in \Omega(N)$, можно получить путем применения операторов A и $B^{(a)}$, построенных в §§1, 2, формулы разложения с $v^{(n)} \in \Omega(N-1)$ и наоборот.

Рассмотрим две краевые задачи

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}y_2^{(n)} + (k^2 - v_2^{(n)}(x))y^{(n)} = 0, \quad 0 < x < \infty\\
&y_2^{(n)}(0,k) = 0, \qquad\qquad\qquad n = 1,2,
\end{aligned}
\right. \tag{82}
$$

где $v_2^{(n)} \in \Omega(N)$. Пусть k_1^2 — наименьшее собственное число этих задач и $\varphi_2^{(n)}(x) = \varphi_2^{(n)}(x,k_1)$ — соответствующие собственные функции, а $C_{n,1}^{-1} = \int\limits_0^\infty \left(\varphi_2^{(n)}(x)\right)^2 dx$. Рассмотрим, наряду с задачами (82), краевые задачи

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}y^{(n)} + (k^2 - v^{(n)}(x))y^{(n)} = 0, \quad 0 < x < \infty\\
&y^{(n)}(0,k) = 0, \qquad\qquad\qquad n = 1,2,
\end{aligned}
\right. \tag{83}
$$

где

$$(84)\qquad v^{(n)}(x) = v_2^{(n)}(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln I_2^{(n)}(x),$$

$$(85)\qquad I_2^{(n)}(x) = C_{n,1}^{-1}\int_x^\infty Z_2(s)ds,\ Z_2(x) = \Phi_2(x,k_1).$$

Из теоремы 0.3 следует,что

$$v^{(n)} \in \Omega(N-1), \quad \sigma(v^{(n)}) = \sigma(v_2^{(n)}) \setminus \{k_1\}.$$

Т е о р е м а 3.1. Пусть для краевых задач (82) справедлива форму разложения (23), т.е. для любой абсолютно непрерывной $h \in L_1$ имеем

$$(86)\qquad h(x) = -\int_0^\infty \tilde{F}_2(x,k)(h,\Phi_2'(k))dk$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\left\{\tilde{F}_{j,1}^{(2)}(x)(h,\Phi_2'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}^{(2)}(x)(h,\dot{\Phi}_2'(k_j))\right\}.$$

Пусть по задачам (82) построены операторы A и $\tilde{A}$ и по формулам (3((39), (42), (44), (46) из функций $\tilde{F}_2(x,k)$, $\tilde{F}_{j,m}^{(2)}(x)$, $\Phi_2'(x,k)$, $\dot{\Phi}_2'(x,k_j)$ пол чены функции $\tilde{F}(x,k)$, $\tilde{F}_{j,m}(x)$, $\Phi'(x,k)$, $\dot{\Phi}'(x,k_j)$. Тогда для любой абс лютно непрерывной функции $f \in L_1$ справедлива формула разложения·

$$(87)\qquad f(x) = -\int_0^\infty \tilde{F}(x,k)(f,\Phi'(k))dk$$

$$-\sum_{j=2}^{N}\left\{\tilde{F}_{j,1}(x)(f,\Phi'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}(x)(f,\dot{\Phi}'(k_j))\right\}.$$

З а м е ч а н и е. Конструктивность этой теоремы состоит в том, ч если имеем разложение (86), то для краевых задач (83) системы $\{\Phi\}$ $\{\tilde{F}\}$ можно получить непосредственно с помощью теоремы 1.1, минуя построение посредством формул (20), (21), (22).

Доказательство. Пусть $h \in L_1$. Положим

$$\tilde{h}(x) = h(x) + \tilde{F}_{1,1}^{(2)}(x)(h, \Phi_2'(k_1)), \tag{88}$$

$$\tilde{g}(x) = -\int_0^\infty \tilde{F}_2(x,k)(h, \Phi_2'(k))dk \tag{89}$$

$$-\sum_{j=2}^{N} \left\{ \tilde{F}_{j,1}^{(2)}(x)(h, \Phi_2'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}^{(2)}(x)(h, \dot{\Phi}_2'(k_j)) \right\}$$

$$-\tilde{F}_{1,2}^{(2)}(x)(h, \dot{\Phi}_2'(k_1)).$$

Из соотношения биортогональности (см. теорему 0.5) следует, что $\tilde{h} \in L_1(Z_2')$. Обозначим $\tilde{h} = B^{(a)}f$, $f \in L_1$. Формулу разложения (86) можно записать в виде

$$\tilde{h}(x) = \tilde{g}(x). \tag{90}$$

Применим к обоим частям (90) оператор A. Слева получим

$$A\tilde{h} = AB^{(a)}f = f, \tag{91}$$

а справа

$$A\tilde{g} = -\int_0^\infty \tilde{F}(x,k)(h, \Phi_2'(k))dk$$

$$-\sum_{j=2}^{N} \{ \tilde{F}_{j,1}^{(x)}(h, \Phi_2'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}(x)(h, \dot{\Phi}_2'(k_j)) \}.$$

Но из соотношения биортогональности получаем

$$\begin{aligned}
(h, \Phi_2'(k)) &= (\tilde{h} - \tilde{F}_{1,1}^{(2)}(h, \Phi_2'(k_1)), \Phi_2'(k)) \\
&= (\tilde{h}, \Phi_2'(k)) - (\tilde{F}_{1,1}^{(2)}, \Phi_2'(k))(h, \Phi_2'(k_1)) \\
&= (B^{(a)}f, \Phi_2'(k)) = (f, \tilde{A}\Phi_2'(k)) \\
&= (f, \Phi'(k)) \qquad , \ k \in (0,\infty) \cup \{k_2, \dots, k_N\},
\end{aligned}$$

и аналогично

$$(h, \Phi_2'(k_1)) = 0; \quad (h, \dot{\Phi}_2'(k_j)) = (f, \dot{\Phi}'(k_j)), \quad j = 2, \dots, N. \tag{92}$$

Следовательно,

$$A\tilde{g} = -\int_0^\infty \tilde{F}(x,k)(f,\Phi'(k))dk$$
$$- \sum_{j=2}^{N}\{\tilde{F}_{j,1}(x)(f,\Phi'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}(x)(f,\dot{\Phi}'(k_j))\}$$

и, с учетом $A\tilde{h} = f(x)$, это дает (87). Теорема доказана.

Несколько сложнее устанавливается обратное утверждение, т.е. 1 строение формулы разложения для $v_2^{(n)} \in \Omega(N)$, исходя из $v^{(n)} \in \Omega(N -$ Уточним сначала постановку задачи. Теперь в качестве исходных иı ем уравнения (83) со спектром $\sigma(v^{(n)}) = \{k_2, \dots, k_N\}$. Пусть $\tau_1 >$ max $k_1 = i\tau_1$ и $\alpha_n > 0$, $n = 1,2$ — произвольные положительные постоянн Построим потенциалы

$$v_2^{(n)}(x) = v^{(n)}(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln I^{(n)}(x), \tag{93}$$

где

$$I^{(n)}(x) = 1 + \alpha_n \int_0^x (\varphi^{(n)}(s))^2 ds,\ \varphi^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x,k_1).$$

Для краевых задач

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}y_2^{(n)} + (k^2 - v_2^{(n)}(x))y_2^{(n)} = 0, & 0 < x < \infty, \\ y_2^{(n)}(0,k) = 0, & n = 1,2, \end{cases} \tag{94}$$

из теоремы 0.3 имеем $v_2^{(n)} \in \Omega(N)$, где $\sigma(v_2^{(n)}) = \sigma(v^{(n)}) \cup \{k_1\}$, а функı $\varphi_2^{(n)}(x,k_1) = \varphi^{(n)}(x)(I^{(n)}(x))^{-1}$, $\alpha_n^{-1} = C_{n,1}^{-1} = \int_0^\infty(\varphi_2^{(n)}(x)^2)dx$ — собствен функция, соответствующая собственному числу k_1^2.

Т е о р е м а 3.2. Пусть для краевых задач (83) справедлива ф(мула разложения (23), т.е. для любой абсолютно непрерывной $f \in$ имеем разложение (87). Пусть по задачам (83) построены операторы B и $\tilde{B}^{(a)}$ и по формулам из теоремы 2.2 из системы функций $\tilde{F}(x,k)$, $\tilde{F}_{j,m}($ $\Phi_2'(x,k)$, $\dot{\Phi}'(x,k_j)$ получена система функций $\tilde{F}_2(x,k)$, $\tilde{F}_{j,m}^{(2)}(x)$, $\Phi_2'(x,$ $\dot{\Phi}_2'(x,k_j)$. Тогда для любой абсолютно непрерывной $h \in L_1$ спраеведлı формула разложения (86), соответствующая краевым задачам (94).

Доказательство. Пусть $h \in L_1$. Обозначим

$$\tilde{h}(x) = h(x) + \tilde{F}_{1,1}^{(2)}(x)(h,\Phi_2'(k_1))\ ,\ \tilde{h} \in L_1(Z_2')$$

и положим $f = A\tilde{h} \in L_1$. Пусть

$$\begin{aligned} g(x) &= -\int_0^\infty \tilde{F}(x,k)(f,\Phi'(k))dk \\ &- \sum_{j=2}^N \tilde{F}_{j,1}(x)(f,\Phi'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}(x)(f,\dot{\Phi}'(k_j)). \end{aligned}$$

Из соотношения биортогональности имеем

$$\begin{aligned} (f,\Phi'(k)) &= (A\tilde{h},\Phi'(k)) \\ &= (\tilde{h},\tilde{B}^{(a)}\Phi'(k)) \\ &= (\tilde{h},\Phi_2'(k) - \tilde{C}_a(\Phi_2'(k))Z_2') \\ &= (h,\Phi_2'(k)) - \tilde{C}_a(\Phi_2'(k))(\tilde{h},Z_2') \\ &= (h,\Phi_2'(k)) + (\tilde{F}_{1,1}^{(2)},\Phi_2'(k))(h,\Phi_2'(k_1)) \\ &= (h,\Phi_2'(k)) \ , \ k \in (0,\infty) \cup \sigma(v^{(n)}). \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем

$$(f,\dot{\Phi}'(k_j)) = (h,\dot{\Phi}_2'(k_j)) \qquad j = 2,3,\dots,N.$$

Слеодвательно,

$$\begin{aligned} g(x) &= -\int_0^\infty \tilde{F}(x,k)(h,\Phi_2'(k))dk \\ &- \sum_{j=2}^N \{\tilde{F}_{j,1}(x)(h,\Phi_2'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}(x)(h,\dot{\Phi}_2'(k_j))\}. \end{aligned}$$

Формулу разложения (87) можно записать в виде $f(x) = g(x)$, т.е. получаем уравнение $A\tilde{h} = g$. Из теоремы 2.1 для его решения имеем формулу

$$\tilde{h}(x) = C_a(\tilde{h})Z_2(x) + B^{(a)}g.$$

В силу теоремы 2.2 имеем

$$\begin{aligned} B^{(a)}g &= -\int_0^\infty \tilde{F}_2(x,k)(h,\Phi_2'(k))dk \\ &- \sum_{j=2}^N \{\tilde{F}_{j,1}^{(2)}(x)(h,\Phi_2'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}^{(2)}(x)(h,\dot{\Phi}_2'(k_j))\} + C_a^1(h)Z_2(x), \end{aligned}$$

где постоянная

$$C_a^1(h) = \int_0^\infty C_a(\tilde F_2(k))(h, \Phi_2'(k))dk + \sum_{j=2}^N \{C_a(\tilde F_{j,1}^{(2)})(h, \Phi_2'(k_j)) + C_a(\tilde F_{j,2}^{(2)})(h, \dot\Phi_2'(k_j))\}.$$

Так получаем

$$h(x) = -\int_0^\infty \tilde F_2(x)(h, \Phi_2'(k))dk - \sum_{j=2}^N \{\tilde F_{j,1}^{(2)}(x)(h, \Phi_2'(k_j)) + \tilde F_{j,2}^{(2)}(x)(h, \dot\Phi_2'(k_j))\} - \tilde F_{1,1}^{(2)}(x)(h, \dot\Phi_2'(k_1)) + C_a^2(h)Z_2(x),$$

где

$$C_a^2(h) = C_a(\tilde h) + C_a^1(h).$$

Умножив скалярно обе части этого равенства на $\dot\Phi_2'(k)(x, k_1)$, получа ем, в силу соотношения биортогональности,

$$C_a^2(h)Z_2(x) = -\tilde F_{j,2}^{(2)}(x)(h, \dot\Phi_2'(k_1)),$$

т.е. разложение (86). Теорема доказана.

Для формулы разложения (24) справедливы подобные утверждения:

Теорема 3.3. Пусть для краевых задач (82) справедлива формул разложения (24), т.е. для любой абсолютно непрерывной $h \in L_1$ имеем

$$h(x) = -\int_0^\infty \Phi_2'(x, k)(h, \tilde F_2(k))dk - \sum_{j=1}^N \left\{\Phi_2'(x, k_j)(h, \tilde F_{j,1}^{(2)}) + \dot\Phi_2'(x, k_j)(h, \tilde F_{j,2}^{(2)})\right\}. \tag{95}$$

Пусть по задачам (82) построены операторы A, $\tilde A$ и по формулам из тео ремы 1.1 из системы функций $\Phi_2'(x, k)$, $\dot\Phi_2'(x, k_j)$, $\tilde F_2(x, k)$,$\tilde F_{j,m}^{(2)}(x)$ получен система функций $\Phi'(x, k)$, $\dot\Phi'(x, k_j)$, $\tilde F(x, k)$, $\tilde F_{j,m}(x)$. Тогда для любой аб солютно непрерывной $f \in L_1$ справедлива формула разложения

$$f(x) = -\int_0^\infty \Phi'(x, k)(f, \tilde F(k))dk - \sum_{j=2}^N \{\Phi'(x, k_j)(f, \tilde F_{j,1}'(x)) + \dot\Phi'(x, k_j)(f, \tilde F_{j,2})\}. \tag{96}$$

Теорема 3.4. **Пусть для краевых задач (83) справедлива формула разложения (24), т.е. для любой абсолютно непрерывной $f \in L_1$ имеем разложение (96). Пусть по задачам (83) построены операторы** $B^{(a)}$, $\tilde{B}^{(a)}$ **и по формулам из теоремы** 2.2 **из системы функций** $\Phi'(x,k)$, $\dot{\Phi}'(x,k_j)$, $\tilde{F}(x,k)$, $F_{j,m}(x)$ **получена система функций** $\Phi_2'(x,k)$, $\dot{\Phi}_2'(x,k_j)$, $\tilde{F}_2(x,k)$, $\tilde{F}_{j,m}^{(2)}(x)$. **Тогда для любой** абсолютно непрерывной $f \in L_1$ справедлива формула разложения **(95)**, соответствующая краевым задачам (94).

При доказательстве теорем 3.3 и 3.4 необходимо использовать операторы $\tilde{A}$, $\tilde{B}^{(a)}$ на месте A, $B^{(a)}$ и тот факт, что если $h \in L_1$, то $\tilde{h}(x) = h(x) + \dot{\Phi}_2'(x,k_1)(h, \tilde{F}_{1,2}^{(2)}) \in L_1(Z_2)$ и к $\tilde{h}$ можно применить оператор $\tilde{A}$.

З а м е ч а н и е. Подставляя в формуле разложения (23) $h(x) = -\int\limits_x^\infty f(s)ds$ и интегрируя по частям в коэфициентах разложения $(h, \Phi'(k))$, $k \in (0,\infty) \cup \sigma$ и $(h, \dot{\Phi}'(k_j))$, $k_j \in \sigma$, получаем формулу разложения (см. [6])

$$
\begin{aligned}
-\int\limits_x^\infty f(s)ds &= \int\limits_0^\infty \tilde{F}(x,k)(f,\Phi(k))dk \\
&+ \sum_{j=1}^N \{\tilde{F}_{j,1}(x)(f,\Phi(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}(x)(f,\dot{\Phi}(k_j))\}.
\end{aligned}
$$

§4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (84)

В этом параграфе, предполагая, что $v^{(1)} = v^{(2)} = v$, изучим более подробно свойства операторов A и $B^{(a)}$, построенных в §§1,2. Не оговаривая особо, будем пользоваться введенными уже обозначениями, подразумевая всюду в дальнейшем, что $v_1^{(n)} = v_1$, $v_2^{(n)} = v_2$, $n = 1,2$. Рассмотрим преобразование (84) как оператор, определенный в множестве $\Omega(N+1)$ со значениями в $\Omega(N)$, $N \geqq 0$, т.е. имеем оператор

$$
(97) \qquad T(v_2) = v_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln(\alpha\int\limits_x^\infty f^2(v_2;s,k)ds), \ \alpha^{-1} = \int\limits_0^\infty f^2(x)dx,
$$

где $k_1 = k_1(v_2) : f(v_2;k_1) = 0$ и $f(v_2;x,k_1)$ — собственная функция краевой задачи (9), (10). Основным результатом здесь является

Т е о р е м а 4.1. Для любой функции $h \in L_1(Z_2)$, т.е.

$$
(98) \qquad h \in \{L_1 \ : \ (h, Z_2) = 0 \ , \qquad Z_2(x) = f^2(v_2;x,k_1)\},
$$

при фиксированном $v_2 \in \Omega(N+1)$ существует дифференциал

$$
(99) \qquad \frac{d}{d\varepsilon}T(v_2+\varepsilon h)|_{\varepsilon=0} \overset{\text{def}}{=} T'(v_2)h = \tilde{A}h, \quad \forall h \in L_1(Z_2),
$$

где оператор $\tilde{A} = \tilde{A}_1\tilde{A}_2$ определяется указанным в §1 образом.

З а м е ч а н и е. Напомним, что дифференциал собственного числа $\lambda_1(v_2) = k_1^2$ дается формулой

$$(100)\qquad \frac{d}{d\varepsilon}\lambda_1(v+\varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = \alpha(Z_2, h), \qquad \alpha^{-1} = \int\limits_0^\infty f^2(v_2; x, k_1)dx.$$

Следовательно, условие $(h, Z_2) = 0$ означает, что производная оператора T рассматривается на множестве функций, не меняющих собственное число $\lambda_1(v_2)$. Указанная в (97) зависимость T от $\alpha = \alpha(v_2)$ на самом деле привидна, так как

$$T(v_2) = v_2(x) + 2\frac{d}{dx}\left\{Z_2(x)\left(\int\limits_x^\infty Z_2(s)ds\right)^{-1}\right\}.$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобиться следующая

Л е м м а 4.1. Решение Йоста $f(v_2; x, k)$ (при фиксированном k) является дифференцируемой по v_2 функцией и ее дифференциал имеет следующий вид:

$$(101)\qquad f'_{v_2}h = f(v; x)\int\limits_x^\infty Z_2^{-1}(s)\left(\int\limits_s^\infty Z_2(\xi)h(\xi)d\xi\right)ds, \quad h \in X_1.$$

Доказательство хорошо известно (см. например [11]), но здесь напомним его для полноты изложения. Рассмотрим, наряду с уравнением (9), опуская для краткости индекс 2, пертурбированное уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}f(v+h; x) + (k_1^2 - v(x))f(v+h; x) = h(x)f(v+h; x).$$

Так как при $h = 0$ вместе с $f(v; x)$ вторым линейно независимым решением уравнения (9) является функция

$$g(v; x) = f(x)\int\limits_a^x f^{-2}(s)ds, \qquad W(f, g) = 1,$$

то $f(v+h; x)$ удовлетворяет уравнению

$$f(v+h; x) = f(v; x) + \int\limits_x^\infty K(v; x, s)h(s)f(v+h; s)ds,$$

где при $x \leqq s$ функция

$$K(v; x, s) = f(x)g(s) - g(x)f(s) = f(x)f(s)\int\limits_x^s Z^{-1}(s)ds.$$

$$f(v+h;x)=f(v;x)+f(v;x)\int\limits_x^\infty f(v;s)f(v+h;s)h(s)\left(\int\limits_x^s Z^{-1}(\xi)d\xi\right)ds,$$

что с точностью до $O(\|h\|^2)$ дает

$$f'_v h = f(v;x)\int\limits_x^\infty Z(s)\left(\int\limits_x^s Z^{-1}(\xi)d\xi\right)h(s)ds.$$

Отсюда, меняя порядок интегрирования, с учетом оценки (30), получаем **искомую** формулу (101). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Опуская индекс 2, т.е. $Z(x)=Z_2(x)$, $v=v_2$, и учитывая определение (27) для $Z_1(x)$, т.е.

$$Z_1(x)=Z^{-1}(x)\left(\int\limits_x^\infty Z(s)ds\right)^2, \tag{102}$$

получаем из определения операторов $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2^{(\infty)}$, что

$$\tilde{A}^{(\infty)}h=\tilde{A}_1\tilde{A}_2^{(\infty)}h=h(x)-2(Z^{-1}(x))'\int\limits_x^\infty Z(s)h(s)ds \tag{103}$$

$$-2(Z_1^{-1}(x))'\int\limits_x^\infty Z_1(s)ds+4(Z_1^{-1}(x))'\int\limits_x^\infty Z_1(s)(Z^{-1}(s))'\left(\int\limits_s^\infty Z(\xi)h(\xi)d\xi\right)ds.$$

Отметим, что из (102) имеем

$$Z_1(x)(Z^{-1}(x))'=\frac{1}{2}\left(Z^{-2}(x)\right)'\left(\int\limits_x^\infty Z(s)ds\right)^2. \tag{104}$$

Далее из леммы 4.1 и формулы (100) следует, что оператор $T(v)$ дифференцируем **по v и** его дифференциал

$$T'(v)h=h(x)-4\frac{d^2}{dx^2}\left(\int\limits_x^\infty f(v;s)f'_v h(s)ds\left(\int\limits_x^\infty Z(s)ds\right)^{-1}\right)$$

$$-\frac{2\alpha}{k_1}\frac{d^2}{dx^2}\left(\int\limits_x^\infty f(v;s,k_1)\dot{f}(v;s,k_1)ds\left(\int\limits_x^\infty Z(s)ds\right)^{-1}\right)(h,Z).$$

Отсюда, в силу формулы (101) получаем, что если h удовлетворяет условию (98), то

$$T'(v)h = h(x) - 4\frac{d^2}{dx^2}I(x), \tag{105}$$

где

$$I(x) = \left(\int_x^\infty Z(s)ds\right)^{-1}\int_x^\infty Z(s)\left(\int_s^\infty Z(\xi)\left(\int_\xi^\infty Z(\eta)h(\eta)d\eta\right)d\xi\right)ds.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$I(x) = \int_x^\infty Z^{-1}(s)\left(\int_s^\infty Z(\xi)h(\xi)d\xi\right)ds$$

$$-\left(\int_x^\infty Z(s)ds\right)^{-1}\int_x^\infty Z^{-1}(s)\left(\int_s^\infty Z(\xi)d\xi\right)\left(\int_s^\infty Z(\xi)h(\xi)d\xi\right)ds.$$

Отсюда, в силу (102) и (104), следует, что

$$I'(x) = -\frac{1}{2}Z^{-1}(x)\int_x^\infty Z(s)h(s)ds + \frac{1}{2}Z_1^{-1}(x)\int_x^\infty Z_1(s)h(s)ds$$

$$-Z_1^{-1}(x)\int_x^\infty Z_1(s)(Z^{-1}(s))'\left(\int_s^\infty Z(\xi)h(\xi)d\xi\right)ds.$$

Подставляя $I'(x)$ в (105) получаем, в силу (103) и леммы 4.1, формулу (99). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В предположении, что оператор $T(v)$ дифференцируем, результат теоремы 4.1 интуитивно явен из следующих соображений:

Пусть для определенности в теореме 4.1 $N = 0$. Из теоремы 2.2 имеем

$$\tilde{F}(v_2; x, k) = B^{(a)}\tilde{F}(v; x, k) + Z_2(x)\left\{\frac{2}{z_2^2(a)}\int_0^a Z_2'(s)\tilde{F}(v_2; s, k)ds\right\}. \tag{106}$$

Далее из теоремы 0.3 следует, что спектральные плотности краевых задач (9), (10) совпадают, т.е.

$$\varrho(T(v_2); k) = \varrho(v_2; k) \qquad \left(\varrho(v; k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\pi}\frac{k^2}{|f(v; k)|^2}\right).$$

Дифференцируя по v_2, с учетом известной формулы (см. например [11])

$$\varrho'(v)h = -\frac{2k}{\pi}\int\limits_0^\infty h(x)\mathrm{Im}\left\{\frac{F(v;x,k)}{F(v;k)}\right\}dx,$$

получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon}\varrho(T(v_2+\varepsilon h);k)|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\varrho(v_2+\varepsilon h;k)|_{\varepsilon=0},$$

т.е.

$$(\tilde{F}(v;k),T'(v_2)h) = (\tilde{F}(v_2;k),h)(v=T(v_2)).$$

Отсюда вытекает, что если $(h,Z_2)=0$, то, в силу (106) и (73), имеем

$$(\tilde{F}(v;k),T'(v_2)h) = (B^{(a)}\tilde{F}(v;k),h) = (\tilde{F}(v;k),\tilde{A}h).$$

Теперь для того, чтобы получить (99), остается заметить, что из разложения (24) следует полнота системы $\tilde{F}(v;x,k)$ в пространстве L_1, т.е. из $(f,\tilde{F}(v;k))=0$, $k\in(0,\infty)$ имеем $f(x)\equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. C r u m m, M. M. Associated Strum — Liouville systems. — Quart. S. Math., **6**, 1955, 121–127.
2. К р е й н, М. Г. О континуальном аналоге одной формулы Кристоффеля из теории ортогональных многочленов. — ДАН СССР, 113, 1957, 970–973.
3. Ф а д д е е в, Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. — Усп. мат. наук, **14**, вып. 4(88), 1959, 57–119.
4. А г р а н о в и ч, З. С., В. А. М а р ч е н к о. Обратная задача теории рассеяния. Харков, 1960.
5. D e i f t, P. A. Applications of a commutation formula. — Duke J. Math., **45**, No 2, 1978, 267–310.
6. Х р и с т о в, Е. Х. О спектральных свойствах операторов, связанных с разложениями по произведениям решений двух радиальных уравнений Шредингера. I. Формулы разложения. Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **75**, кн.2 — Механика, 197–213.
7. Х р и с т о в, Е. Х. О спектральных свойствах операторов, связанных с разложениями по произведениям решений двух радиальных уравнений Шредингера. II. Спектральная теория. Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **75**, кн.2 — Механика, 215–230.
8. М и ш е в, И. П., Е. Х. Х р и с т о в. Об обратной задаче квантовой теории рассеяния для радиального уравнения Шредингера. I. Спектральная теория операторов $\Lambda_0^{(\ell)}$ и $\Lambda_\infty^{(\ell)}$. Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **80**, кн.2 — Механика.
9. Ж и д к о в, Е. П., Е. Х. Х р и с т о в. Об определении оператора Штурма-Лиувилля по одному спектру для нулевых граничных условий. ОИЯИ, Р5-86-634, Дубна, 1986.